ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ВОЗДУШНОГО ТРАНСПОРТА
(РОСАВИАЦИЯ)
ФГБОУ ВО «САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ГРАЖДАНСКОЙ АВИАЦИИ»
(ФГБОУ ВО СПбГУ ГА)

УТВЕРЖДАЮ
Первый
проректор-проректор
по учебной работе
__________ Н.Н. Сухих
«16» апреля 2019 года

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ

Основы функционального анализа

Направление подготовки
01.03.04 Прикладная математика

Направленность программы (профиль)
Математическое и программное обеспечение систем управления

Квалификация выпускника
бакалавр

Форма обучения
очная

Санкт-Петербург
2019

1 Цели освоения дисциплины

Целями освоения дисциплины «Основы функционального анализа» являются формирование у обучающихся комплекса теоретических знаний основных понятий, фактов и методов, составляющих теоретическую основу функционального анализа, а также приобретение ими умений и практических навыков применения математических методов в профессиональной деятельности.

Задачами освоения дисциплины «Основы функционального анализа» являются:

– формирование у обучающихся знаний основных понятий теории функционалов и операторов в пространствах, общей теории отображений;

– приобретение обучающимися умений использовать современные концепции и модели функционального анализа;

– овладение обучающимися навыками применения аппарата функционального анализа в прикладной математике.

Дисциплина обеспечивает подготовку выпускника к научно-исследовательскому типу профессиональной деятельности.

2 Место дисциплины в структуре ОПОП ВО

Дисциплина «Основы функционального анализа» представляет собой дисциплину, относящуюся к Части, формируемой участниками образовательных отношений Блока 1 «Дисциплины (модули)».

Дисциплина «Основы функционального анализа» базируется на результатах обучения, полученных при изучении дисциплин «Теория функций комплексного переменного», «Линейная алгебра и аналитическая геометрия».

Дисциплина «Основы функционального анализа» является обеспечивающей для Подготовки к сдаче и сдаче государственного экзамена.

Дисциплина «Основы функционального анализа» изучается в 7 семестре.

3 Компетенции обучающегося, формируемые в результате освоения дисциплины

Процесс освоения дисциплины «Основы функционального анализа» направлен на формирование следующих компетенций:

Перечень и код компетенций	Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине
Способен применять знание фундаментальной математики и естественно-научных дисциплин при решении задач в области естественных наук и инженерной практике (ОПК-1).	Знать: - основные понятия из теории метрических, нормированных, евклидовых, топологических пространств, теории функционалов и операторов в банаховых пространствах, теории меры, общей теории отображений. Уметь: - использовать методы функционального анализа для решения практических задач. Владеть: - стандартными методами и моделями функционального анализа.

4 Объем дисциплины и виды учебной работы

Общая трудоемкость дисциплины составляет 4 зачетные единицы, 144 академических часа.

Наименование	Всего часов	Семестр
		7
Общая трудоемкость дисциплины	144	144
Контактная работа:	56,5	56,5
лекции	28	28
практические занятия	28	28
семинары	–	–
лабораторные работы	–	–
курсовой проект (работа)	–	–
Самостоятельная работа студента	70	70
Промежуточная аттестация	18	18
контактная работа	0,3	0,3
самостоятельная работа по подготовке к зачету с оценкой	17,7	17,7

5 Содержание дисциплины

5.1 Соотнесения тем (разделов) дисциплины и формируемых компетенций

Темы (разделы) дисциплины	Количество часов	Компетенции		
		ОПК-1	Образовательные технологии	Оценочные средства
Тема 1. Метрические пространства	24	+	ВК, Л, ПЗ, СРС	РЗ
Тема 2. Линейные, нормированные, евклидовы пространства	24	+	Л, ПЗ, СРС	РЗ
Тема 3. Топологические пространства	30	+	Л, ПЗ, СРС	РЗ
Тема 4. Линейные операторы и функционалы	18	+	Л, ПЗ, СРС	РЗ
Тема 5. Теория меры и интеграла Лебега	30	+	Л, ПЗ, СРС	РЗ
Всего по дисциплине	126			
Промежуточная аттестация	18			
Итого по дисциплине	144			

Л– лекция, ПЗ – практическое занятие, СРС – самостоятельная работа студента, ВК – входной контроль, РЗ – разноуровневые задачи.

5.2 Темы (разделы) дисциплины и виды занятий

Наименование темы (раздела) дисциплины	Л	ПЗ	С	ЛР	СРС	КР	Всего часов
Тема 1. Метрические пространства	4	4			16		24
Тема 2. Линейные, нормированные, евклидовы пространства	4	4			16		24
Тема 3. Топологические пространства	8	8			14		30
Тема 4. Линейные операторы и функционалы	4	4			10		18
Тема 5. Теория меры и интеграла Лебега	8	8			14		30
Всего за семестр	28	28			70		126
Промежуточная аттестация							18
Итого за семестр							144

Л – лекция, ПЗ – практическое занятие, СРС – самостоятельная работа студента, С – семинар, ЛР – лабораторная работа, КР – курсовая работа.

5.3 Содержание дисциплины

Тема 1. Метрические пространства

Понятие метрического пространства. Сходимость. Открытые и замкнутые множества. Полные метрические пространства. Принцип сжимающих отображений и его применение.

Тема 2. Линейные, нормированные, евклидовы пространства

Линейные пространства. Выпуклые множества и выпуклые функционалы. Нормированные пространства. Евклидовы пространства. Пространство Банаха. Пространство Гильберта.

Тема 3. Топологические пространства

Общее описание топологического пространства. Определение и примеры топологических пространств. Сравнение топологий. Определяющие системы окрестностей. База. Непрерывные отображения. Гомеоморфизм. Аксиомы отделимости. Различные способы заданий топологий в пространстве. Топологические линейные пространства.

Тема 4. Линейные операторы и функционалы

Непрерывные линейные функционалы. Сопряженное пространство. Обобщенные функции. Линейные операторы.

Тема 5. Теория меры и интеграла Лебега

Мера плоских множеств. Общее понятие меры. Лебегово продолжение меры. Измеримые функции. Основные понятия и общее определение интеграла Лебега. Монотонные функции. Дифференцируемость интеграла Лебега по верхнему пределу. Производная неопределенного интеграла Лебега. Интеграл Лебега как функция множества. Интеграл Лебега – Стилтьеса. Пространство L_1. Пространство L_2. Ряды по ортогональным системам.

5.4 Практические занятия (семинары)

Номер темы дисциплины	Тематика практических занятий (семинаров)	Трудоемкость (часы)
1	Практическое занятие 1. Примеры метрических пространств. Сходимость в метрических пространствах. Полнота пространства.	2
	Практическое занятие 2. Принцип сжимающих отображений. Применение принципа сжимающих отображений для решения уравнений.	2
2	Практическое занятие 3. Норма и нормированные пространства. Непрерывные отображения.	2
	Практическое занятие 4. Евклидовы пространства. Ортогональные системы элементов.	2
3	Практическое занятие 5-6. Топологические пространства.	4
	Практическое занятие 7-8. Способы задания топологий.	4
4	Практическое занятие 9. Линейные функционалы в нормированных пространствах. Обобщенные функции.	2
	Практическое занятие 10. Линейные операторы.	2
5	Практическое занятие 11. Системы множеств.	2
	Практическое занятие 12. Общее понятие меры. Стандартное распространение меры. Мера Лебега.	2
	Практическое занятие 13. Измеримые функции. Интеграл Лебега.	2
	Практическое занятие 14. Ряды по ортогональным системам.	2
Итого по дисциплине		28

5.5 Лабораторный практикум

Лабораторный практикум учебным планом не предусмотрен.

5.6 Самостоятельная работа

Номер темы дисциплины	Виды самостоятельной работы	Трудоемкость (часы)
1	1. Изучение теоретического материала [1-3]. 2. Подготовка к решению разноуровневых задач.	16
2	1. Изучение теоретического материала [2,4,6]. 2. Подготовка к решению разноуровневых задач.	16
3	1. Изучение теоретического материала [3,5,7]. 2. Подготовка к решению разноуровневых задач.	14
4	1. Изучение теоретического материала [4,7-9]. 2. Подготовка к решению разноуровневых задач.	10
5	1. Изучение теоретического материала [1,2,5]. 2. Подготовка к решению разноуровневых задач.	14
Итого по дисциплине		70

5.7 Курсовые работы (проекты)

Курсовые работы (проекты) учебным планом не предусмотрены.

6 Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины

а) основная литература:

1. Гуревич, А.П. **Сборник задач по функциональному анализу** [Электронный ресурс] : учебное пособие / А.П. Гуревич, В.В. Корнев, А.П. Хромов. — Электрон. дан. — Санкт-Петербург : Лань, 2012. — 192 с. — Режим доступа: https://e.lanbook.com/book/3175 . — Загл. с экрана.

2. Власова, Е.А. **Элементы функционального анализа** [Электронный ресурс] : учеб. пособие / Е.А. Власова, И.К. Марчевский. — Электрон. дан. — Санкт-Петербург: Лань, 2015. — 400 с. — Режим доступа: https://e.lanbook.com/book/67481. — Загл. с экрана.

3. Филимоненкова, Н.В. **Конспект лекций по функциональному анализу** [Электронный ресурс] : учебное пособие / Н.В. Филимоненкова. — Электрон. дан. — Санкт-Петербург : Лань, 2015. — 176 с. — Режим доступа: https://e.lanbook.com/book/64343 . — Загл. с экрана.

б) дополнительная литература:

4. Люстерник, Л.А. **Краткий курс функционального анализа** [Электронный ресурс] : учебное пособие / Л.А. Люстерник, В.И. Соболев. —

Электрон. дан. — Санкт-Петербург : Лань, 2009. — 272 с. — Режим доступа: https://e.lanbook.com/book/245 . — Загл. с экрана.

5. Филимоненкова, Н.В. **Сборник задач по функциональному анализу** [Электронный ресурс] : учебное пособие / Н.В. Филимоненкова. — Электрон. дан. — Санкт-Петербург : Лань, 2015. — 240 с. — Режим доступа: https://e.lanbook.com/book/65041 . — Загл. с экрана.

в) перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет»:

6. **Общероссийский математический портал** [Электронный ресурс]. – Режим доступа: http://www.mathnet.ru/ свободный (дата обращения: 11.03.2019).

г) программное обеспечение (лицензионное), базы данных, информационно-справочные и поисковые системы:

7. **Единое окно доступа к образовательным ресурсам** [Электронный ресурс]. – Режим доступа: http://window.edu.ru, свободный (дата обращения: 11.03.2019).

8. **Электронная библиотека научных публикаций «eLIBRARY.RU»** [Электронный ресурс] — Режим доступа: http://elibrary.ru/, свободный (дата обращения: 11.03.2019).

9. **Электронно-библиотечная система издательства «Лань»** [Электронный ресурс] — Режим доступа: http://e.lanbook.com/, свободный (дата обращения: 11.03.2019).

7 Материально-техническое обеспечение дисциплины

Компьютерные классы кафедры № 8 (ауд.: 800, 801, 803, 804) с доступом в Интернет, переносной проектор.

Информационно-справочные и материальные ресурсы библиотеки СПбГУ ГА.

Лицензионное программное обеспечение: Microsoft Office.

8 Образовательные и информационные технологии

Дисциплина «Основы функционального анализа» предполагает использование следующих образовательных технологий: входной контроль, лекции, практические занятия и самостоятельная работа студента.

В соответствии с реализацией компетентностного подхода и учебным задачам дисциплины в начале изучения дисциплины проводится входной контроль. Он осуществляется по вопросам из дисциплин, на которых базируется дисциплина «Основы функционального анализа» (п. 2).

Лекция проводится с целью организации целенаправленной познавательной деятельности студентов по овладению программным материалом дисциплины «Основы функционального анализа». Чтение курса лекций позволяет дать связанное, последовательное изложение материала в соответствии с новейшими данными науки, сообщить обучающимся основное содержание дисциплины в целостном, систематизированном виде.

Практическое занятие по дисциплине «Основы функционального анализа» способствует привитию умений и навыков практической деятельности по дисциплине, а также закрепление, углубление, расширение и детализация полученных в ходе лекций и самостоятельной работы теоретических знаний.

Самостоятельная работа студента способствует углублению и расширению знаний, формирование самостоятельных навыков решения научных и прикладных задач, а также самостоятельная работа студента направлена на формирование интереса к познавательной деятельности и навыков самостоятельной работы в научно-исследовательской сфере.

В рамках изучения дисциплины «Основы функционально анализа» предполагается использовать в качестве информационных технологий среду MS Office.

9 Фонд оценочных средств для проведения текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации по итогам освоения дисциплины

Дисциплина «Основы функционального анализа» предполагает использование следующих оценочных средств: разноуровневые задач.

Разноуровневые задачи позволяют оценивать и диагностировать знание фактического материала и умение правильно использовать специальные термины и понятия, синтезировать, анализировать, обобщать теоретический материал с формулированием конкретных выводов, установлением причинно-следственных связей; позволяющие оценивать и диагностировать умения, интегрировать знания различных областей, аргументировать собственную точку зрения.

Промежуточная аттестация по итогам освоения дисциплины проводится в виде зачета с оценкой в 7 семестре. Зачет с оценкой позволяет оценить уровень освоения компетенций за весь период изучения дисциплины.

9.1. Балльно-рейтинговая оценка текущего контроля успеваемости и знаний студентов

Тема/вид учебных занятий (оценочных заданий), позволяющих студенту продемонстрировать достигнутый уровень сформированности компетенций	Количество баллов		Срок контроля (порядковый номер недели с начала семестра)	При-меча-ние
	мини-мальное значение	макси-мальное значение		
Контактная работа				
Аудиторные занятия				
Лекция № 1-14		9	1-14	
Практическое занятие № 1-14	9	13,5	1-14	
Разноуровневые задачи № 1-5	36	47,5	1-14	
Итого по обязательным видам занятий	**45**	**70**		
Зачет с оценкой	**15**	**30**		
Итого по дисциплине	**60**	**100**		
Премиальные виды деятельности (для учета при определении рейтинга)				
Научные публикации по теме дисциплины		5		
Участие в конференциях по теме дисциплины		5		
Участие в предметной олимпиаде		5		
Прочее		5		
Итого дополнительно премиальных баллов		20		
Всего по дисциплине (для рейтинга)		120		

Перевод баллов балльно-рейтинговой системы в оценку по «академической» шкале	
Количество баллов по БРС	**Оценка (по «академической» шкале)**
90 и более	5 – «отлично»
75÷89	4 – «хорошо»
60÷74	3 – «удовлетворительно»
менее 60	2 – «неудовлетворительно»

9.2 Методические рекомендации по проведению процедуры оценивания знаний, умений и навыков и (или) опыта деятельности, характеризующих этапы формирования компетенций

Посещение студентом лекционного занятия с ведением конспекта оценивается до 0,5 баллов. Посещение практического занятия с ведением конспекта оценивается от 0,5 до 0,75 баллов. Решение разноуровневых задач оценивается от 7,2 до 9,5 баллов.

9.3 Темы курсовых работ (проектов) по дисциплине

Написание курсовых работ (проектов) учебным планом не предусмотрено.

9.4 Контрольные задания для проведения входного контроля остаточных знаний по обеспечивающим дисциплинам

1. Определение линейного пространства. Примеры.
2. Базис и размерность. Изоморфизм линейных пространств.
3. Подпространства линейных пространств. Сумма и пересечение, прямая сумма подпространств
4. Евклидово пространство. Примеры.
5. Линейные операторы. Примеры.
6. Основные свойства интегралов по области.
7. Двойной интеграл по плоской области. Геометрический смысл.
8. Вычисление двойного интеграла в декартовых координатах.
9. Двойной интеграл в полярных координатах.
10. Двойной интеграл в криволинейных координатах.
11. Расскажите о комплексных числах и арифметических действиях над ними (включая доказательство единственности частного).
12. Что такое вещественная $\mathrm{Re}\,z$ и мнимая $\mathrm{Im}\,z$ части числа z?
13. Что называется сопряженным числом $\bar{z}$?
14. Что такое комплексная плоскость $\mathbb{C}$?
15. Дайте определение модуля $|z|$.
16. Дайте определение аргумента $\mathrm{Arg}\,z$ и его главного значения $\arg z$
17. Поясните геометрический смысл модуля и аргумента.

9.5 Описание показателей и критериев оценивания компетенций на различных этапах их формирования, описание шкал оценивания

Критерий	Этапы формирования	Показатель
Способен применять знание фундаментальной математики и естественно-научных дисциплин при решении задач в области естественных наук и инженерной практике (ОПК-1).		
Знать: - основные понятия из теории метрических, нормированных,	1 этап формирования	- определяет спектр оператора в мультинормированном пространстве;

Критерий	Этапы формирования	Показатель
евклидовых, топологических пространств, теории функционалов и операторов в банановых пространствах, теории меры, общей теории отображений.	2 этап формирования	- распознает случаи, когда непрерывное отображение метрического пространства в полное метрическое пространство допускает распространение на пополнение исходного пространства
Уметь: - использовать методы функционального анализа для решения практических задач.	1 этап формирования	- воспроизводит методы и понятия функционального анализа, наиболее удобные для решения данной научно-исследовательской задачи;
	2 этап формирования	- применяет методы и теоремы функционального анализа при решении научно-исследовательской задачи;
Владеть: - стандартными методами и моделями функционального анализа.	1 этап формирования	- описывает строение линейных операторов, определенных на прямой сумме пространств и действующих в произведение пространств;
	2 этап формирования	- устанавливает критерии компактности множеств в классических банаховых пространствах;
	2 этап формирования	- описывает сублинейные функционалы, определенные на R^N

Характеристики шкалы оценивания приведены ниже.

1. Максимальное количество баллов за зачет с оценкой – 30. Минимальное количество баллов за зачет с оценкой – 15 баллов.
2. При наборе менее 15 баллов – зачет с оценкой не сдан по причине недостаточного уровня знаний.
3. Зачет с оценкой выставляется как сумма набранных баллов за ответы на вопросы и за решение задачи.
4. Ответы на вопросы оцениваются следующим образом:

– *1 балл*: отсутствие продемонстрированных знаний и компетенций в рамках образовательного стандарта (нет ответа на вопрос) или отказ от ответа;

– *2 балла*: нет удовлетворительного ответа на вопрос, демонстрация фрагментарных знаний в рамках образовательного стандарта, незнание лекционного материала;

– *3 балла*: нет удовлетворительного ответа на вопрос, много наводящих вопросов, отсутствие ответов по основным положениям вопроса, незнание лекционного материала;

– *4 балла*: ответ удовлетворительный, оценивается как минимально необходимые знания по вопросу, при этом студентом продемонстрировано хотя бы минимальное знание всех разделов вопроса в пределах лекционного материала. При этом студентом демонстрируется достаточный объем знаний в рамках образовательного стандарта;

– *5 баллов*: ответ удовлетворительный, достаточные знания в объеме учебной программы, ориентированные на воспроизведение; использование научной (технической) терминологии, стилистически грамотное, логически правильное изложение ответа на вопросы, умение делать выводы;

– *6 баллов*: ответ удовлетворительный, студент достаточно ориентируется в основных аспектах вопроса, демонстрирует полные и систематизированные знания в объеме учебной программы;

– *7 баллов*: ответ хороший (достаточное знание материала), но требовались наводящие вопросы, студент демонстрирует систематизированные, глубокие и полные знания по всем разделам учебной программы;

– *8 баллов*: ответ хороший, ответом достаточно охвачены все разделы вопроса, единичные наводящие вопросы; студент демонстрирует способность самостоятельно решать сложные проблемы в рамках учебной программы;

– *9 баллов*: систематизированные, глубокие и полные знания по всем разделам учебной программы; студент демонстрирует способность самостоятельно и творчески решать сложные проблемы в нестандартной ситуации в рамках учебной программы;

– *10 баллов*: ответ на вопрос полный, не было необходимости в дополнительных (наводящих вопросах); студент демонстрирует систематизированные, глубокие и полные знания по всем разделам учебной программы, а также по основным вопросам, выходящим за ее пределы.

5. Решение задачи оценивается следующим образом:

– *10 баллов*: задание выполнено на 91-100 %, решение и ответ аккуратно оформлены, выводы обоснованы, дана правильная и полная интерпретация выводов, студент аргументированно обосновывает свою точку зрения, уверенно и правильно отвечает на вопросы преподавателя;

– *9 баллов*: задание выполнено на 86-90 %, решение и ответ аккуратно оформлены, выводы обоснованы, дана правильная и полная интерпретация выводов, студент аргументированно обосновывает свою точку зрения, правильно отвечает на вопросы преподавателя;

– *8 баллов*: задание выполнено на 81-85 %, ход решения правильный, незначительные погрешности в оформлении; правильная, но не полная интерпретация выводов, студент дает верные, но не полные ответы на вопросы преподавателя, испытывает некоторые затруднения в интерпретации полученных выводов;

– *7 баллов*: задание выполнено на 74-80 %, ход решения правильный, значительные погрешности в оформлении; правильная, но не полная интерпретация выводов, студент дает правильные, но не полные ответы на вопросы преподавателя, испытывает определенные затруднения в интерпретации полученных выводов;

– *6 баллов*: задание выполнено 66-75 %, подход к решению правильный, есть ошибки, оформление с незначительными погрешностями, неполная интерпретация выводов, не все ответы на вопросы преподавателя правильные, не способен интерпретировать полученные выводы;

– *5 баллов*: задание выполнено на 60-65 %, подход к решению правильный, есть ошибки, значительные погрешности при оформлении, неполная интерпретация выводов, не все ответы на вопросы преподавателя правильные, не способен интерпретировать полученные выводы;

– *4 балла*: задание выполнено на 55-59 %, подход к решению правильный, есть ошибки, значительные погрешности при оформлении, неполная интерпретация выводов, не все ответы на вопросы преподавателя правильные, не способен интерпретировать полученные выводы;

– *3 балла*: задание выполнено на 41-54 %, решение содержит грубые ошибки, неаккуратное оформление работы, неправильная интерпретация выводов, студент дает неправильные ответы на вопросы преподавателя;

– *2 балла*: задание выполнено на 20-40 %, решение содержит грубые ошибки, неаккуратное оформление работы, выводы отсутствуют; не может прокомментировать ход решения задачи, дает неправильные ответы на вопросы преподавателя;

– *1 балл:* задание выполнено менее, чем на 20 %, решение содержит грубые ошибки, студент не может прокомментировать ход решения задачи, не способен сформулировать выводы по работе.

9.6 Типовые контрольные задания для проведения текущего контроля и промежуточной аттестации по итогам освоения дисциплины

Типовые разноуровневые задачи.

1. Доказать соотношения между множествами:

а) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$; б) $(A \setminus B) \setminus C = (A \setminus C) \setminus (B \setminus C)$;

в) $(A \cap C) \cup (B \cap D) \subset (A \cup B) \cap (C \cup D)$.

2. Доказать, что для любой последовательности множеств $\{E_n\}$ имеют место включения:

$$\bigcap_{n=1}^{+\infty} E_n \subset \underline{\lim}_{n \to +\infty} E_n \subset \overline{\lim}_{n \to +\infty} E_n \subset \bigcup_{n=1}^{+\infty} E_n .$$

Составить пример такой последовательности множеств $\{E_n\}$, для которого ни одно из данных включений не может быть заменено равенством.

3. Установить взаимно однозначное соответствие между всеми натуральными числами и рациональными числами из промежутка $[0,1]$.

4. Существует ли функция вида $f(x)=\dfrac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\ldots+b_m}$ с целыми коэффициентами $a_0,\ldots,a_n,b_0,\ldots,b_m$ такая, что для любого рационального числа r найдется целое число k, для которого $f(k)=r$?

5. Существует ли непрерывная функция, взаимно однозначно отображающая промежуток $[a,b]$ во множество, являющееся объединением промежутков $[0,1]$ и $[3,4]$?

6. Установить взаимно однозначное соответствие между множеством рациональных точек на прямой и множеством точек на плоскости с рациональными координатами.

7. Доказать, что множество точек разрыва монотонной функции, заданной на отрезке $[a,b]$, конечно или счетно.

8. Пусть E - счетное множество на прямой. Всегда ли можно это множество сдвинуть вправо на некоторую величину a таким образом, чтобы полученное в результате сдвига новое множество E_a не пересекалось с E?

9. Какова мощность множества всех монотонных (не обязательно непрерывных) функций, заданных на $[a,b]$?

10. Какова мощность множества всех кругов на плоскости?

11. Является ли метрическим множество всех вещественных чисел, если под расстоянием между двумя числами x и y понимать величину:

а) $\rho(x,y)=\sin^2(x-y)$? б) $\rho(x,y)=\sqrt{|x-y|}$?

12. Пусть E - множество точек на окружности C. Будем под расстоянием между двумя точками этого множества понимать длину кратчайшей дуги окружности, соединяющей эти точки. Является ли множество E метрическим?

13. Привести примеры множеств на плоскости, которые: а) не имеют граничных точек; б) имеют граничные точки, все из которых самому множеству не принадлежат; в) включают только часть своих граничных точек; г) состоят только из граничных точек.

14. Дана последовательность концентрических окружностей радиусов $r_1<r_2<\ldots<r_n<\ldots$. Является ли их объединение замкнутым множеством? А открытым? А если рассматривать не окружности, а круги?

15. Доказать, что множество всех граничных точек любого множества всегда замкнуто.

16. Доказать, что множество всех иррациональных чисел является множеством типа G_δ.

17. Можно ли на отрезке $[0,1]$ построить совершенное, нигде не плотное множество меры 1? А меры 0.9?

18. Пусть E - множество иррациональных чисел из промежутка $[0,1]$, в десятичной записи которых отсутствует цифра 5. Замкнуто ли это множество? Что собой представляет его замыкание? Содержит ли оно изолированные точки? Является ли оно нигде не плотным?

19. Может ли счетное множество на плоскости иметь континуум предельных точек, каждая из которых самому множеству не принадлежит?

20. Можно ли открытый круг на плоскости представить в виде пересечения двух открытых множеств (отличных от всей плоскости), сумма которых равна всей плоскости?

21. Показать на примере, что расстояние между двумя замкнутыми непересекающимися множествами может равняться нулю.

22. Показать, что множество частичных сумм абсолютно сходящегося ряда – замкнуто.

23. Может ли множество частичных сумм расходящегося ряда с положительными слагаемыми иметь бесконечно много изолированных точек?

24. Пусть дано множество точек на плоскости, нижняя грань расстояний между которыми положительна. Доказать, что тогда это множество не более, чем счетно.

Перечень типовых вопросов к зачету с оценкой для проведения промежуточной аттестации по дисциплине

1. Множества. Основные операции над множествами. Отображения множеств. Эквивалентность множеств.
2. Счетные множества. Счетность множества рациональных чисел. Теорема Кантора. Мощность континуума.
3. Метрические пространства. Примеры. Основные определения (шара, предельной точки, замкнутости, открытости, всюду плотности, нигде не плотности, сепарабельности). Примеры.
4. Фундаментальные последовательности. Полные пространства. Примеры. Теорема о вложенных шарах. Теорема Бэра. Пополнение пространства.
5. Линейные пространства. Основные определения (линейной независимости, базиса, размерности пространства, подпространства). Изоморфизм линейных пространств. Нормированные пространства. Примеры. Связь нормы и метрики. Банахово пространство.
6. Непрерывные отображения. Сжимающиеся отображения. Принцип сжимающихся отображений.
7. Приложение принципа сжимающихся отображений к решению алгебраических уравнений и систем.
8. Приложение принципа сжимающихся отображений к решению дифференциальных уравнений. Теорема Пикара.
9. Приложение принципа сжимающихся отображений к решению интегральных уравнений. Уравнения Фредгольма и Вольтерра.

10. Компактные метрические пространства. Критерий компактности. Выпуклые множества. Принцип неподвижной точки Шаудера.

11. Евклидовы пространства. Ортогональные системы элементов. Полнота системы элементов. Теоремы об ортогональном базисе.

12. Ряд Фурье. Теорема о наилучшем приближении элемента. Неравенство Бесселя.

13. Замкнутые ортогональные системы. Равенство Парсеваля. Теорема о полноте и замкнутости ортогональной системы в сепарабельном пространстве. Теорема Рисса-Фишера.

14. Необходимое и достаточное условие полноты ортогональной системы в сепарабельном пространстве.

15. Гильбертовы пространства. Теорема об изоморфизме сепарабельных гильбертовых пространств.

16. Топологические пространства.

17. Функционалы в нормированном пространстве. Непрерывность, линейность функционалов. Теорема о непрерывности дистрибутивного функционала.

18. Теорема о непрерывности дистрибутивного функционала в R^n. Общий вид линейного функционала в R^n.

19. Ограниченность функционала. Теорема об ограниченности непрерывных функционалов.

20. Норма функционала. Теорема о норме. Примеры.

21. Общий вид линейного функционала в евклидовом пространстве.

22. Линейные операторы в конечномерных пространствах. Матрица оператора. Сумма и произведение операторов.

23. Ядро и образ линейного оператора. Дефект и ранг линейного оператора. Невырожденный оператор. Свойства. Обратный оператор.

24. Собственные числа и собственные элементы линейного оператора. Инвариантные подпространства. Сопряженные операторы. Свойства. Самосопряженные, ортогональные, нормальные операторы. Норма оператора.

25. Аддитивные функции. Свойства. Теорема о счетной аддитивности. Теорема о возрастающей и убывающей последовательности множеств.

26. Мера множества. Свойства меры.

27. Внешняя мера. Теорема о внешней мере.

28. Мера, порожденная внешней мерой. Теорема о μ^*-измеримых множествах.

29. Теоремы о повторном применении процедуры стандартного распространения меры и о единственности распространения.

30. Мера Лебега.

31. Измеримые множества. Измеримость открытых, замкнутых множеств и параллелепипедов. Конечные и счетные множества.

32. Теорема о представлении внешней меры. Следствия. Множества типа F_σ и G_δ.

33. Измеримые функции. Свойства.

34. Арифметические свойства измеримых функций.
35. Предельный переход в классе измеримых функций.
36. Сходимость «почти всюду» и эквивалентные функции.
37. Сходимость по мере. Теорема об эквивалентных функциях.
38. Связь сходимости «почти всюду» и сходимости по мере. Теорема Лебега.
39. Связь сходимости по мере и сходимости «почти всюду». Леммы. Теорема Рисса.
40. Теорема об устойчивости сходимости. Теорема о регуляторе сходимости.
41. Интеграл Лебега от ограниченной функции по множеству конечной меры. Суммы Лебега-Дарбу. Теорема об интегрируемости измеримой функции. Связь интеграла Лебега с интегралом Римана.
42. Свойства интеграла Лебега от ограниченной функции.
43. Интеграл Лебега – общий случай. Суммируемые функции. Свойства суммируемых функций. Геометрический смысл интеграла Лебега.

Типовая задача для промежуточной аттестации

Построить счетную совокупность попарно не пересекающихся счетных множеств, каждое из которых всюду плотно на прямой.

10 Методические рекомендации для обучающихся по освоению дисциплины

Лекции являются одним из важнейших видов учебных занятий и составляют основу теоретической подготовки обучающихся по дисциплинам вообще и по дисциплине «Основы функционального анализа» в частности. Будучи по содержанию теоретическими, прикладными и методическими, по данной дисциплине они являются теоретическими. По назначению: вводными, тематическими и заключительными.

Лекция имеет целью дать систематизированные основы научных знаний по дисциплине, раскрыть состояние и перспективы прогресса конкретной области науки, сконцентрировать внимание на наиболее сложных и узловых вопросах.

Эта цель определяет дидактическое назначение лекции, которое заключается в том, чтобы ознакомить обучающихся с основным содержанием, категориями, принципами и закономерностями изучаемой темы и предмета обучения в целом, его главными идеями и направлениями развития, его прикладной стороной.

Именно на лекции формируется научное мировоззрение, закладываются теоретические основы фундаментальных знаний, стимулируется его активная познавательная деятельность, решается целый ряд вопросов воспитательного характера.

Методика преподавания лекционного курса дисциплины строится на использовании конкретной, оптимальной для нее методической системы. Методическая системы есть сумма методов, приемов и средств обучения. Основой для построения системы служат дидактические принципы высшей школы, педагогическая психология и обобщенный опыт преподавания дисциплины.

Интерес к изучению учебного материала достигается на лекции применением комплекса методических приемов: четкой формулировкой темы, разъяснением важности знания учебного материала для дальнейшей практической деятельности; выделением в изучаемом материале главного; созданием на занятиях хорошего эмоционального настроя; использованием творческого характера заданий на самостоятельную работу, выдаваемых обучающимся.

Практические занятия по дисциплине имеют целью углубление, и конкретизацию теоретических знаний, полученных на лекции и в ходе самостоятельной работы, для отработки навыков и умений в пользовании соответствующем математическим аппаратом.

Зачет с оценкой является заключительными оценочным средством, позволяет определить уровень освоения обучающимся компетенций (п. 9.5) за период изучения данной дисциплины. Зачет с оценкой предполагает ответы на 2 теоретических вопроса из перечня вопросов, вынесенных на промежуточную аттестацию, а также решение задачи (п. 9.6).

Рабочая программа дисциплины составлена в соответствии с требованиями ФГОС ВО по направлению подготовки 01.03.04 «Прикладная математика».

Программа рассмотрена и утверждена на заседании кафедры №8 Прикладной математики и информатики

«9» апреля 2019 года, протокол № 9.

Разработчики:

Скляренко А.А.

(ученая степень, ученое звание. фамилия и инициалы разработчиков)

Заведующий кафедрой № 8 Прикладной математики и информатики

к.т.н., доцент Далингер Я.М.

(ученая степень, ученое звание, фамилия и инициалы заведующего кафедрой)

Программа согласована:

Руководитель ОПОП

к.т.н., доцент Далингер Я.М.

(ученая степень, ученое звание. фамилия и инициалы руководителя ОПОП)

Программа рассмотрена и одобрена на заседании Учебно-методического совета Университета «16» апреля 2019 года, протокол № 6.