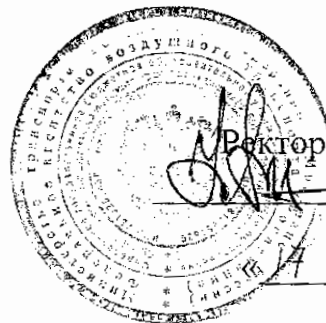




**ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ВОЗДУШНОГО ТРАНСПОРТА
(РОСАВИАЦИЯ)**

**ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ГРАЖДАНСКОЙ АВИАЦИИ»**



УТВЕРЖДАЮ

Ю.Ю. Михальчевский

14 » ИЮНЯ 2021 года

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ

Теория функций комплексного переменного

Направление подготовки
01.03.04 Прикладная математика

Направленность программы (профиль)
Математическое и программное обеспечение систем управления

Квалификация выпускника
бакалавр

Форма обучения
очная

Санкт-Петербург
2021

1. Цели освоения дисциплины

Целями освоения дисциплины «Теория функций комплексного переменного» являются формирование у обучающихся знаний об основных понятиях теории функций комплексного переменного, формирование представлений о её методах и взаимосвязях с действительным анализом, а также с другими математическими дисциплинами.

Задачами освоения дисциплины «Теория функций комплексного переменного» являются:

– формирование у обучающихся знаний об аналитических функциях, комплексном интеграле, аналитическом продолжении, римановой поверхности и особых точках функции, рядах аналитических функций, вычетах;

– приобретение обучающимися умений дифференцирования функций комплексного переменного, построения конформных отображений простейших областей, вычисления комплексных интегралов, разложения функций в ряд Тейлора и ряд Лорана, а также вычисления вычетов функций;

– овладение обучающимися навыками применения методов комплексного анализа для решения прикладных и научно-исследовательских задач;

Дисциплина обеспечивает подготовку выпускника к научно-исследовательскому типу профессиональной деятельности.

2. Место дисциплины в структуре ОПОП ВО

Дисциплина «Теория функций комплексного переменного» представляет собой дисциплину, относящуюся к Базовой части Блока 1 «Дисциплины».

Дисциплина «Теория функций комплексного переменного» базируется на результатах обучения, полученных при изучении дисциплин: «Линейная алгебра и аналитическая геометрия», «Физика».

Дисциплина «Теория функций комплексного переменного» является обеспечивающей для дисциплин: «Цифровая обработка сигналов», «Основы функционального анализа».

Дисциплина «Теория функций комплексного переменного» изучается в 4 семестре.

3. Компетенции обучающегося, формируемые в результате освоения

ДИСЦИПЛИНЫ

Процесс освоения дисциплины «Теория функций комплексного переменного» направлен на формирование следующих компетенций:

Код компетенции/ индикатора	Результат обучения: наименование компетенции, индикатора компетенции
ОПК-1	Способен применять знание фундаментальной математики и естественно-научных дисциплин при решении задач в области естественных наук и инженерной практике
ИД ¹ _{ОПК1}	Применяет знания фундаментальной математики при решении поставленных задач

Планируемые результаты изучения дисциплины:

Знать:

основные положения теории функций комплексного переменного и операционного счисления;

Уметь:

выбирать подходящий метод операционного исчисления к решению конкретной научно-исследовательской или прикладной задачи;

Владеть:

стандартными методами теории функций комплексного переменного и навыками их применения.

4. Объем дисциплины и виды учебной работы

Общая трудоемкость дисциплины составляет 3 зачетных единиц, 108 академических часов.

Наименование	Всего часов	Семестры
		4
Общая трудоемкость дисциплины	108	108
Контактная работа:	38,5	38,5
лекции	18	18
практические занятия	18	18
семинары	-	-
лабораторные работы	-	-

Наименование	Всего часов	Семестры
курсовой проект	-	-
Самостоятельная работа студента	36	36
Промежуточная аттестация	36	36
контактная работа	2,5	2,5
самостоятельная работа по подготовке к экзамену	33,5	33,5

5. Содержание дисциплины

5.1. Соотнесения тем (разделов) дисциплины и формируемых компетенций

Темы (разделы) дисциплины	Количество часов	Компетенции	Образовательные технологии	Оценочные средства
		ОПК-1		
Тема 1. Функции комплексного переменного	18	+	Л, ПЗ, СРС, ВК	ПАР
Тема 2. Аналитические функции и аналитическое продолжение	18	+	Л, ПЗ, СРС	ПАР
Тема 3. Ряды Тейлора и Лорана	18	+	Л, ПЗ, СРС	ПАР
Тема 4. Криволинейные интегралы. Теория вычетов	18	+	Л, ПЗ, СРС	ПАР
Итого по дисциплине	72			
Промежуточная аттестация	36			
Всего по дисциплине	108			

Л– лекция, ПЗ – практическое занятие, СРС – самостоятельная работа студента, ПАР – письменная аудиторная работа, ВК – входной контроль.

5.2. Темы (разделы) дисциплины и виды занятий

Наименование раздела дисциплины	Л	ПЗ	КР	СРС	ЛР	Всего часов
Тема 1. Функции комплексного переменного	4	4	-	10	-	18
Тема 2. Аналитические функции и аналитическое продолжение	4	4	-	10	-	18
Тема 3. Ряды Тейлора и Лорана	4	4	-	10	-	18
Тема 4. Криволинейные интегралы. Теория вычетов	6	6	-	6	-	18
Итого по дисциплине	18	18	-	36	-	72
Промежуточная аттестация						36
Всего по дисциплине						108

Л– лекция, ПЗ – практическое занятие, КР – курсовая работа, СРС – самостоятельная работа студента, ЛР – лабораторная работа, ПАР – письменная аудиторная работа, ВК – входной контроль.

5.3 Содержание разделов дисциплины

Тема 1. Функции комплексного переменного

Комплексные числа и комплексная плоскость. Алгебраическая форма комплексного числа. Равенство комплексных чисел, их геометрический смысл. Действия сложения, вычитания, умножения, деления. Модуль и аргумент комплексного числа. Тригонометрическая форма. Модуль и аргумент произведения и частного комплексных чисел. Действие извлечения корня. Плоскость комплексного переменного. Окрестность точки на комплексной плоскости. Предельные, внутренние, граничные точки. Область и замкнутая область точек на комплексной плоскости. Непрерывная кривая.

Функция комплексного переменного. Понятие о функции комплексного переменного. Однозначные и многозначные функции. Геометрический смысл функции комплексного переменного. Взаимно однозначное отображение. Элементарные функции комплексного переменного: линейная, инверсия, дробно-линейная, степенная, радикал, показательная, логарифмическая, гиперболические, тригонометрические, обратные тригонометрические и гиперболические. Предел функции комплексного переменного и ее непрерывность.

Определенный интеграл. Интегральная теорема Коши для односвязной и многосвязной областей. Формула среднего значения. Существование и регулярность всех производных аналитической функции. Интегральные формулы производных. Интеграл Коши и интеграл типа Коши, их свойства. Принцип максимума модуля. Теорема Лиувилля.

Тема 2. Аналитические функции и аналитическое продолжение

Аналитические функции. Производная функции комплексного переменного. Дифференцируемость функции в точке. Дифференциал. Условия Коши-Римана дифференцируемости функций. Понятие об аналитической (регулярной) функции. Гармонические и сопряженные гармонические функции. Построение аналитической функции по ее вещественной или мнимой части. Геометрический смысл модуля и аргумента производной аналитической функции. Понятие о конформном отображении.

Тема 3. Ряды Тейлора и Лорана

Числовые и функциональные ряды. Ряд комплексных чисел. Сходимость, абсолютная сходимость. Общие свойства сходящихся и абсолютно сходящихся рядов. Функциональный ряд. Область сходимости. Равномерная сходимость. Признаки Коши и Вейерштрасса равномерной сходимости. Свойства равномерно сходящихся рядов: непрерывность суммы, почленное интегрирование, аналитичность суммы, почленное дифференцирование. Степенной ряд. Теорема Абеля. Структура области сходимости. Дифференциальные и интегральные операции над степенным рядом. Ряды, содержащие положительные и отрицательные степени. Структура области сходимости.

Ряд Лорана. Теорема Лорана. Ряд Лорана. Ряд Тейлора, как частный случай ряда Лорана. Разложения в ряды функций, аналитических в круге и функций, аналитических в окрестности бесконечно удаленной точки. Разложения в ряды элементарных функций. Особые точки функций комплексного переменного. Изолированные особые точки однозначного характера, их классификация.

Тема 4. Криволинейные интегралы. Теория вычетов

Понятия вычета функции относительно изолированной особой точки однозначного характера. Теорема Коши о вычетах. Вычисление вычетов в правильных точках, полюсах и существенно-особых точках. Вычисление интегралов с помощью вычетов. Вычисление контурных интегралов. Вычисление некоторых вещественных определенных интегралов. Вычисление несобственных вещественных интегралов. Лемма Жордана. Подсчет числа корней функции в области. Логарифмический вычет. Подсчет числа нулей аналитической функции в области. Принцип аргумента. Теорема Руше.

5.4 Практические занятия

Номер темы дисциплины	Тематика практических занятий (семинаров)	Трудо-емкость (часы)
-----------------------	---	----------------------

Номер темы дисциплины	Тематика практических занятий (семинаров)	Трудо-емкость (часы)
1	Практическое занятие 1. Различные виды записи выполнения арифметических действий с комплексными числами. Нахождение модуля и аргумента комплексного числа.	2
	Практическое занятие 2. Функция комплексного переменного. Однозначные и многозначные функции. Взаимно однозначное отображение.	2
2	Практическое занятие 3. Производная функции комплексного переменного. Дифференцируемость функции в точке.	2
	Практическое занятие 4. Построение аналитической функции по ее вещественной или мнимой части.	2
3	Практическое занятие 5. Числовые и функциональные ряды. Ряд комплексных чисел. Исследование на сходимость числовых рядов.	2
	Практическое занятие 6. Разложения в ряды функций, аналитических в круге и функций, аналитических в окрестности бесконечно удаленной точки. Разложения в ряды элементарных функций.	2
4	Практическое занятие 7. Вычисление вычетов в правильных точках, полюсах и существенно-особых точках. Вычисление интегралов с помощью вычетов.	2
	Практическое занятие 8. Вычисление контурных интегралов. Вычисление некоторых вещественных определенных интегралов. Вычисление несобственных вещественных интегралов.	2
	Практическое занятие 9. Подсчет числа нулей аналитической функции в области. Принцип аргумента. Теорема Руше.	2
Итого по дисциплине		18

5.5 Лабораторный практикум

Лабораторный практикум учебным планом не предусмотрен.

5.6 Самостоятельная работа

Номер темы дисциплины	Виды самостоятельной работы	Трудо-емкость (часы)
1	1. Поиск, анализ информации и проработка учебного материала [1, 2, 4]. 2. Подготовка к письменной аудиторной работе [6-9]	10
2	1. Поиск, анализ информации и проработка учебного материала [2, 3, 4]. 2. Подготовка к письменной аудиторной работе [6-9]	10
3	1. Поиск, анализ информации и проработка учебного материала [1, 2, 3, 4]. 2. Подготовка к письменной аудиторной работе [6-9]	10
4	1. Поиск, анализ информации и проработка учебного материала [2, 3, 4]. 2. Подготовка к письменной аудиторной работе [6-9]	6
Итого по дисциплине		36

5.7 Курсовые проекты

Курсовые работы (проекты) учебным планом не предусмотрены.

6 Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины

а) Основная литература

1. Бугров, Я. С. **Высшая математика в 3 т. Том 3. В 2 кн. Книга 2. Ряды. Функции комплексного переменного: учебник для академического бакалавриата** / Я. С. Бугров, С. М. Никольский. — 7-е изд., стер. — М. : Издательство Юрайт, 2018. — 219 с. — (Серия : Бакалавр. Академический курс). — ISBN 978-5-9916-8645-7. — Режим доступа: <https://biblio-online.ru/viewer/D35B2C9E-3C75-49B8-B586-AF0D99418FD3/>

2. Эйдерман, В. Я. **Теория функций комплексного переменного и операционное исчисление: учебное пособие для академического бакалавриата** / В. Я. Эйдерман. — 2-е изд., испр. и доп. — М. : Издательство

Юрайт, 2018. — 263 с. — (Серия : Бакалавр. Академический курс). — ISBN 978-5-534-05498-9. — Режим доступа: <https://biblio-online.ru/viewer/ADF3D3E7-1501-4778-B2FB-72D616B0323E/>

3. Курс высшей математики. Теория функций комплексной переменной [Электронный ресурс] : учебное пособие / И.М. Петрушко [и др.]. — Электрон. дан. — Санкт-Петербург : Лань, 2010. — 368 с. — Режим доступа: <https://e.lanbook.com/book/526>. — Загл. с экрана.

б) Дополнительная литература

4. Пантелеев, А.В. **Теория функций комплексного переменного и операционное исчисление в примерах и задачах** [Электронный ресурс] : учебное пособие / А.В. Пантелеев, А.С. Якимова. — Электрон. дан. — Санкт-Петербург : Лань, 2015. — 448 с. — Режим доступа: <https://e.lanbook.com/book/67463>. — Загл. с экрана.

5. Привалов, И.И. **Введение в теорию функций комплексного переменного** [Электронный ресурс] : учебник / И.И. Привалов. — Электрон. дан. — Санкт-Петербург : Лань, 2009. — 432 с. — Режим доступа: <https://e.lanbook.com/book/322>. — Загл. с экрана.

в) перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет»:

5. **Краткий курс лекций по дисциплине «Теория функций комплексного переменного»** [Электронный ресурс]. — Режим доступа: <http://osinavi.ru/my/TFKP.php> - Загл. с экрана (дата обращения: 20.01.2021).

г) программное обеспечение (лицензионное), базы данных, информационно-справочные и поисковые системы:

6. **Единое окно доступа к образовательным ресурсам** [Электронный ресурс]. — Режим доступа: <http://window.edu.ru>, свободный (дата обращения: 20.01.2021).

7. **Электронно-библиотечная система издательства «Юрайт»** [Электронный ресурс] — Режим доступа: <https://biblio-online.ru>, свободный (дата обращения: 20.01.2021).

8. **Электронно-библиотечная система издательства «Лань»** [Электронный ресурс] — Режим доступа: <http://e.lanbook.com/>, свободный (дата обращения: 20.01.2021).

9. **Scilab** [Программное обеспечение] — Режим доступа: <https://www.scilab.org/> - свободный (дата обращения: 20.01.2021).

7 Материально-техническое обеспечение дисциплины

Компьютерные классы кафедры № 8 (ауд.: 800, 801, 803, 804) с доступом в Интернет, переносной проектор.

Информационно-справочные и материальные ресурсы библиотеки СПбГУ ГА.

Лицензионное программное обеспечение: Microsoft Office, Scilab.

8 Образовательные и информационные технологии

В рамках изучения дисциплины предполагается использовать следующие образовательные технологии.

Входной контроль проводится преподавателем в начале изучения дисциплины с целью коррекции процесса усвоения обучающимися дидактических единиц при изучении базовых дисциплин.

Лекция составляет основу теоретического обучения в рамках дисциплины и направлена на систематизированное изложение накопленных и актуальных научных знаний. Лекция предназначена для раскрытия состояния и перспектив развития экономических знаний в современных условиях. На лекции концентрируется внимание обучающихся на наиболее сложных и узловых вопросах, стимулируется их активная познавательная деятельность.

Ведущим методом в лекции выступает устное изложение учебного материала, который сопровождается одновременной демонстрацией слайдов, при необходимости привлекаются открытые Интернет-ресурсы, а также демонстрационные и наглядно-иллюстрационные материалы и практические примеры.

Цель практических занятий – закрепить теоретические знания, полученные обучающимися на лекциях и в результате самостоятельного изучения соответствующих тем, а также приобрести начальные практические навыки. Рассматриваемые в рамках практического занятия задачи, ситуации, примеры и проблемы имеют профессиональную направленность и содержат элементы, необходимые для формирования компетенций в рамках подготовки обучающихся. Практические занятия предусматривают участие обучающихся в выполнении отдельных элементов работ, связанных с будущей профессиональной деятельностью.

Практические занятия по дисциплине являются составляющими практической подготовки обучающихся, так как предусматривают их участие в выполнении отдельных элементов работ, связанных с будущей профессиональной деятельностью.

Самостоятельная работа обучающихся является составной частью учебной работы. Ее основной целью является формирование навыка самостоятельного приобретения знаний по некоторым вопросам теоретического курса, закрепление и углубление полученных знаний, самостоятельная работа со справочниками. Самостоятельная работа включает выполнение учебных заданий, в том числе и индивидуальных.

9 Фонд оценочных средств для проведения текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации по итогам освоения дисциплины

Уровень и качество знаний обучающихся оцениваются по результатам текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации по итогам освоения дисциплины.

Оценочные средства включают: письменную аудиторную работу, задания, выдаваемые на самостоятельную работу по темам дисциплины, устный опрос пройденного материала.

Устный опрос проводится на практических занятиях с целью контроля усвоения теоретического материала, излагаемого на лекции.

Письменная аудиторная работа выполняется обучающимися на практических занятиях по индивидуальным вариантам на основании задания, выдаваемого преподавателем по соответствующей теме дисциплины и представляет собой оценку практического применения полученных теоретических знаний.

Контроль выполнения задания, выполняемого на практических занятиях, преследует собой цель своевременного выявления плохо усвоенного материала дисциплины для последующей корректировки.

Промежуточная аттестация по итогам освоения дисциплины проводится в виде экзамена в 4 семестре.

Экзамен позволяет оценить уровень освоения компетенций за весь период изучения дисциплины. Билет включает два теоретических вопроса и задачу.

9.1 Балльно-рейтинговая оценка текущего контроля успеваемости и знаний студентов по дисциплине

Не применяется.

9.2 Методические рекомендации по проведению процедуры оценивания знаний, умений и навыков и (или) опыта деятельности, характеризующих этапы формирования компетенций

Устный опрос оценивается следующим образом:

«зачтено»: обучающийся дает ответ на поставленный вопрос по существу и правильно отвечает на уточняющие вопросы;

«не зачтено»: обучающийся отказывается отвечать на поставленный вопрос, либо отвечает на него неверно и при формулировании дополнительных (вспомогательных) вопросов.

Письменная аудиторная работа:

«зачтено»: работа зачитывается в том случае, если задание выполнено полностью, в соответствии с поставленными требованиями и сделаны необходимые выводы;

«не зачтено»: работа не зачитывается в том случае, если обучающийся не

выполнил задания, или результат выполнения задания не соответствует поставленным требованиям, а в заданиях и (или) ответах имеются существенные ошибки.

9.3 Темы курсовых проектов по дисциплине

Курсовые работы (проекты) учебным планом не предусмотрены.

9.4 Контрольные вопросы для проведения входного контроля остаточных знаний по обеспечивающим дисциплинам

1. Матрицы. Операции над матрицами: сложение; матриц, умножение матрицы на число, произведение матриц. Элементарные преобразование матрицы. Примеры.
2. Понятие ранга матрицы. Элементарные преобразования и ранг матрицы. Вычисление ранга матрицы. Примеры.
3. Понятие системы линейных уравнений. Терминология. Примеры. Теорема Кронекера-Капелли с доказательством.
4. Метод Гаусса решение линейных систем уравнений.
5. Координаты и компоненты вектора. Линейные операции над векторами в координатах (формулы с выводом). Примеры.
6. Проекция вектора на ось. Свойство суммы проекций и выражение проекции через длину вектора и косинус угла.
7. Понятие неопределенного интеграла.
8. Понятие определенного интеграла.
9. Интерполирование полиномами. Интерполяционная формула Лагранжа.
10. Погрешность интерполяционного полинома.
11. Интерполирование с кратными узлами. Полиномы Эрмита.
12. Интерполирование сплайнами.

9.5 Описание показателей и критериев оценивания компетенций на различных этапах их формирования, описание шкал оценивания

Компетенции	Показатели оценивания (индикаторы достижения) компетенций	Критерии оценивания
I этап		
ОПК-1	ИД ¹ _{ОПК1}	<p>Знает:</p> <p style="padding-left: 40px;">правила дифференцирования и интегрирования функций комплексного переменного при решении научно-исследовательских и прикладных задач;</p> <p>Умеет:</p> <p style="padding-left: 40px;">решать задачи на вычисление интегралов при помощи вычетов, на разложение функций в ряды Тейлора и Лорана;</p>
II этап		
ОПК-1	ИД ¹ _{ОПК1}	<p>Умеет:</p> <p style="padding-left: 40px;">использовать методы теории функций комплексного переменного для решения задач различного вида;</p> <p>Владеет:</p> <p style="padding-left: 40px;">навыками выполнять основные алгебраические операции с комплексными числами;</p> <p style="padding-left: 40px;">навыками осуществлять проверку на условия Коши-Римана, гармоничность и сопряженность;</p> <p style="padding-left: 40px;">навыками осуществлять проверку на условия Коши-Римана, гармоничность и сопряженность.</p>

Шкала оценивания при проведении промежуточной аттестации
«Отлично» выставляется обучающемуся, показавшему всесторонние,

систематизированные, глубокие знания по рассматриваемой компетенции и умение уверенно применять их на практике при решении задач, свободное и правильное обоснование принятых решений. Отвечая на вопрос, может быстро и безошибочно проиллюстрировать ответ собственными примерами. Обучающийся самостоятельно правильно решает задачу, дает обоснованную оценку итогам решения.

«Хорошо» выставляется обучающемуся, если он твердо знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задачи некоторые неточности, хорошо владеет всем содержанием, видит взаимосвязи, но не всегда делает это самостоятельно без помощи преподавателя. Обучающийся решает задачу верно, но при помощи преподавателя.

«Удовлетворительно» выставляется обучающемуся, показавшему фрагментарный, разрозненный характер знаний, недостаточно правильные формулировки базовых понятий, нарушения логической последовательности в изложении программного материала, но при этом он владеет основными разделами учебной программы в рамках заданной компетенции, необходимыми для дальнейшего обучения и может применять полученные знания по образцу в стандартной ситуации. Отвечает только на конкретный вопрос, соединяет знания из разных разделов курса только при наводящих вопросах преподавателя. Ситуационная задача решена не полностью, или содержатся незначительные ошибки в расчетах.

«Неудовлетворительно» выставляется обучающемуся, который не знает большей части основного содержания учебной программы дисциплины в рамках компетенций, допускает грубые ошибки в формулировках основных понятий дисциплины и не умеет использовать полученные знания при решении типовых практических задач. Не раскрыты глубина и полнота при ответах. Задача не решена даже при помощи преподавателя.

9.6 Типовые контрольные задания для проведения текущего контроля и промежуточной аттестации по итогам обучения по дисциплине

9.6.1 Примерные контрольные задания для проведения текущего контроля успеваемости

Примерный перечень вопросов устного опроса

1. Различные формы представления комплексного числа. Геометрическая интерпретация комплексных чисел. Записать несколько комплексных чисел в алгебраической, тригонометрической и показательной формах. Записать к ним комплексно-сопряженные. Изобразить числа на плоскости.
2. Арифметические операции с комплексными числами. Вычислить сумму, произведение и частное комплексных чисел.
3. Вычисление $f(z) = z^n$.

4. Вычисление корня n -й степени из комплексного числа.
5. Вычисление значения функции $\exp(z)$.
6. Вычисление значений тригонометрических функций комплексного переменного.
7. Вычисление значений гиперболических функций комплексного переменного.
8. Вычисление значений показательной и степенной функций комплексного переменного.
9. Вычисление значений обратных тригонометрических функций комплексного переменного.

Примерный вариант письменной аудиторной работы

1. Значение производной функции комплексного переменного в точке. Дана функция $f(z) = z^3$. Вычислить значение $f'(z)$ в точке $z_0 = 1 + i$, ее модуль и аргумент.
2. Исследование дифференцируемости функции. Дана функция $f(z) = |z|^2$.
3. Исследование дифференцируемости функции, вычисление производной. Дана функция $f(z) = e^z$.
4. Вычислить интеграл $\int_l \operatorname{Re}(z) dz$, где:
 5. а). l – прямая, соединяющая точки $z_1 = 0$ и $z_2 = 1 + i$;
 6. б). l – ломаная OBA , $O(0,0)$, $B(1,0)$, $A(1,1)$.
7. Вычислить интеграл $\int_l |z| \bar{z} dz$, l – верхняя полуокружность $|z| = 1$, обход l против часовой стрелки.
8. Вычислить интеграл от аналитической функции $\int_0^i \sin^2 z dz$.
9. Определить порядок нуля z_0 для функции $f(z) = e^z - 1 - z$.
10. Найти нули функции $f(z)$ и определить их порядок:
 11. $f(z) = (z^4 + 2z + 1)^2(z^2 - 2z + 2)$.
 12. Найти нули функции $f(z)$ и определить их порядок: $f(z) = 1 + \operatorname{ch} z$.
 13. Определить порядок нуля $z_0 = 0$ функции $f(z) = (e^{z^2} - 1 - z^2) \sin^5 z$.
 14. Найти все конечные особые точки функции $f(z) = \frac{z^3 - 1}{(z^3 + 1)(z^3 + i)}$.

15. Найти все конечные особые точки функции $f(z) = \frac{\sin z}{\sin \frac{1}{z}}$. и определить

их тип.

16. Определить тип особой точки $z = 0$ для функции $f(z) = e^{\frac{1}{z}}$.

17. Найти особые точки функции $f(z) = \frac{z+2}{(z-3)(z+1)}$. и определить их тип.

18. Найти особые точки функции $f(z) = \exp\left(\frac{1}{z-i}\right)$. и определить их тип.

19. Разложение в ряд Тейлора функции $f(z)$, аналитической в области комплексных чисел. Записать разложение по степеням z функции $f(z) = \operatorname{ch} z$.

20. Разложение в ряд Тейлора рациональной дроби. Разложить по степеням $(z-3)$ функцию $f(z) = \sin z$.

21. Разложить по степеням z функцию $f(z) = \frac{z+1}{(z-1)^2(z+2)}$.

22. Разложить функцию $f(z) = \frac{z+2}{z^2-2z-3}$ в ряд Лорана по степеням z .

23. Разложить функцию $f(z) = z^3 \cdot e^{1/z}$ в окрестности точки $z_0 = 0$.

24. Вычислить вычет функции $f(z) = (z+2)/(z^2-2z-3)$ в точке $z = 3$.

25. Вычислить вычет функции $f(z)$ в точке $z = 0$, $f(z) = \frac{\sin z}{z}$.

26. Вычислить вычет функции $f(z) = \frac{\ln(1+z)}{z^3}$.

27. Вычислить вычет функции $f(z) = \operatorname{ctg} 2z$ во всех ее особых точках.

28. Вычислить вычет функции $f(z) = z \cdot e^{\frac{1}{z-1}}$.

29. Вычислить интеграл $\oint_{|z-2|=1} \frac{z}{e^z - i} dz$.

30. Вычислить интеграл $\oint_{|z|=1} z^3 e^{\frac{1}{z}} dz$.

31. Вычислить интеграл $\oint_{|z-1|=1} \frac{1}{z^4 + 1} dz$.

32. Вычислить интеграл: $I = \int_0^{2\pi} \frac{dx}{1 - 2a \cdot \cos x + a^2}$ ($|a| < 1$).

33. Вычислить интеграл: $I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2 dx}{(x^2 + a^2)^2} \quad (a > 0).$

34. Вычислить интеграл: $I = \int_0^{+\infty} \frac{x^2 dx}{(x^2 + a^2)^2} \quad (a > 0).$

35. Вычислить интеграл: $I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x+1)e^{ix}}{x^2 - 2x + 2} dx.$

36. Вычислить интеграл: $I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x+1)\cos x}{x^2 - 2x + 2} dx.$

37. Вычислить интеграл: $I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x+1)\sin x}{x^2 - 2x + 2} dx.$

38. Найти изображения заданных функций-оригиналов $f(x) = ax$ и $f(x) = \exp(-x)$. Проверить правильность решения.

39. Решить операционным методом задачу Коши

$$40. x'' + 4x = \cos(2t), \quad x(0) = 1, \quad x'(0) = -1.$$

Проверить правильность решения.

41. Решим операционным методом задачу Коши для системы

$$\begin{aligned} x' &= x + 2y - 9t, \\ y' &= 2x + y + 4\exp(t), \\ x(0) &= 1, \quad y(0) = 2. \end{aligned}$$

Проверить правильность решения.

9.6.2 Контрольные вопросы промежуточной аттестации по итогам освоения дисциплины

1. Расскажите о комплексных числах и арифметических действиях над ними (включая доказательство единственности частного). Что такое вещественная $\operatorname{Re} z$ и мнимая $\operatorname{Im} z$ части числа z ? Что называется сопряженным числом \bar{z} ? Что такое комплексная плоскость \square ? Дайте определение модуля $|z|$. Дайте определение аргумента $\operatorname{Arg} z$ и его главного значения $\arg z$. Поясните геометрический смысл модуля и аргумента.
2. Расскажите об алгебраической, тригонометрической и показательной формах комплексного числа. Дайте определения корня n -й степени из числа. Найдите $\sqrt[3]{i}$.
3. Дайте определение e^z , $\sin z$, $\cos z$. Докажите, что $\cos^2 z + \sin^2 z = 1$.

4. Определите степень комплексного числа z^α . Определите логарифм $\operatorname{Ln} z$ и его главное значение $\ln z$. Вычислите $i^{\sqrt{2}}$, i^i , $\operatorname{Ln} i$.
5. Как задается расстояние в \mathbb{C} ? Что такое окрестность $O(z_0)$ и проколотая окрестность $\dot{O}(z_0)$ точки $z_0 \in \mathbb{C}$? Дайте определение предела последовательности комплексных чисел.
6. Что такое непрерывная кривая в \mathbb{C} ; что называют замкнутой кривой; что называют спрямляемой кривой? Что такое область в \mathbb{C} ? Что такое односвязная область?
7. Расскажите о понятии функции комплексного переменного; приведите примеры. Дайте определение предела функции. Дайте определение непрерывности функции в точке и в области.
8. Расскажите о функции e^z . Установите ее основные свойства (характер отображения, отсутствие нулей, периодичность).
9. Расскажите о функциях $\sin z$, $\cos z$. Докажите их неограниченность. Решите уравнение $\sin z = 0$, $\sin z = 4$.
10. Дайте определение дифференцируемой функции комплексного переменного и ее производной. Поясните геометрический смысл производной.
11. Выведите формулы для производной линейной комбинации, произведения, частного и суперпозиции.
12. Выведите условия Коши–Римана. Дайте определение функции аналитической в области.
13. Докажите, аналитичность функций z^n , e^z , $\sin z$, $\cos z$ (ограничьтесь двумя из перечисленных). Вычислите их производные.
14. Расскажите о функциях $\operatorname{Ln} z$ и z^α , их главных значениях и однозначных ветвях. Расскажите об обратных тригонометрических функциях.
15. Дайте определение дробно-линейной функции. Расскажите о ее свойствах. Выведите круговое свойство.
16. Дайте определение гармонической функции. Изложите метод восстановления аналитической функции по ее действительной или мнимой части.
17. Дайте определение конформного отображения. Опишите все конформные отображения круга $\{z_0 \in \mathbb{C}, |z| < 1\}$ на себя. Сформулируйте теорему Римана о конформном отображении.
18. Дайте определение комплексного криволинейного интеграла. Сформулируйте теорему об интегрируемости непрерывной функции по спрямляемой кривой. Выведите формулу для вычисления интеграла по (кусочно) гладкой кривой. Вычислите

$$\int_{|z-z_0|=r} \frac{dz}{(z-z_0)^n} \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

19. Докажите лемму об оценке интеграла.
20. Докажите интегральную теорему Коши для односвязной области, затем докажите ее для конечносвязной области.
21. Выведите формулу Ньютона–Лейбница для криволинейного интеграла от аналитической функции. Докажите теорему Морера.
22. Выведите интегральную формулу Коши.
23. Расскажите об интегралах типа Коши. Сформулируйте утверждение об их аналитичности, запишите формулу для n -ой производной. Докажите бесконечную дифференцируемость аналитических функций.
24. Расскажите о последовательностях и рядах аналитических функций. Сформулируйте теорему Вейерштрасса о мажорированной сходимости ряда. Расскажите о дифференцировании и интегрировании рядов аналитических функций.
25. Расскажите о степенных рядах. Докажите теорему Абеля о множестве сходимости степенного ряда.
26. Выведите формулы для вычисления радиуса сходимости степенного ряда. Докажите теоремы о равномерной абсолютной сходимости степенного ряда внутри круга сходимости. Докажите аналитичность суммы степенного ряда внутри круга сходимости.
27. Докажите теорему единственности для степенных рядов.
28. Докажите теорему о разложении функции, аналитической в круге, в ряд Тейлора. Выведите формулы для коэффициентов разложения (в том числе в интегральной форме).
29. Докажите теорему Лиувилля об ограниченной целой функции.
30. Дайте определение нуля аналитической функции и его порядка. Как выглядит ряд Тейлора с центром в нуле порядка k ? Докажите теорему единственности для аналитических функций.
31. Дайте определение особой точки. Дайте определение изолированных особых точек и изложите их классификацию (устранимые особые точки, полюсы, существенно особые точки). Докажите критерий устранимой особенности. Как связаны нули аналитической функции f и полюсы $1/f$? Дайте определение полюса порядка k .
32. Расскажите о ряде Лорана. Докажите теорему о разложении функции, аналитической в кольце, в ряд Лорана.
33. Как выглядит лорановское разложение в окрестности устранимой особой точки, в окрестности полюса, в окрестности существенно особой точки?
34. Дайте определение вычета. Расскажите о способах их вычисления. Что такое вычет в ∞ ?
35. Докажите интегральные теоремы о вычетах (в конечной точке и в ∞).
36. Расскажите о вычислении интегралов по границе области при помощи вычетов. Вычислите $\int_{|z|=2} \frac{\sin z}{z^2(z^2+1)} dz$.
37. Докажите лемму Жордана (в верхней полуплоскости).

38. Расскажите о приложении вычетов к вычислению интегралов от вещественных функций, в частности, к вычислению несобственных интегралов.
39. Дайте определение преобразования Лапласа, оригинала и изображения. Докажите линейность преобразования Лапласа.
40. Докажите теоремы о преобразовании Лапласа для производной, первообразной, свертки, и сдвига (теорема запаздывания).
41. Вычислите стандартные изображения (для оригиналов $\eta(t)$, $\eta(t)t^\alpha$, $\eta(t)\sin t$, и т. п.).
42. Расскажите об обращении преобразования Лапласа. Как найти оригинал правильной рациональной функции (изложите два способа: с помощью разложения в сумму простых дробей и при помощи вычетов).
43. Расскажите о приложениях операционного исчисления к решению дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами (задач Коши) и систем дифференциальных уравнений.
44. Расскажите о приложениях операционного исчисления к решению разностных уравнений.
45. Расскажите о приложениях операционного исчисления к решению интегральных уравнений.
46. Расскажите о приложениях операционного исчисления к расчёту электрических схем.

Типовые задачи для проведения промежуточной аттестации

Вычислить $\frac{1}{2\pi} \int_{|z+i|=2} \frac{t^2-1}{t-z} dt$, где $z=0$, $z=2i$, $z=1-i$

10 Методические рекомендации для обучающихся по освоению дисциплины

Методика преподавания дисциплины «Теория функций комплексного переменного» характеризуется совокупностью методов, приемов и средств обучения, обеспечивающих реализацию содержания и учебно-воспитательных целей дисциплины, которая может быть представлена как некоторая методическая система, включающая методы, приемы и средства обучения. Такой подход позволяет более качественно подойти к вопросу освоения дисциплины обучающимися.

Учебные занятия начинаются и заканчиваются по времени в соответствии с утвержденным режимом СПб ГУГА в аудиториях согласно семестровым расписаниям теоретических занятий. На занятиях, предусмотренных расписанием, обязаны присутствовать все обучающиеся.

Лекции являются одним из важнейших видов учебных занятий и составляют основу теоретической подготовки обучающихся по дисциплинам. Лекция имеет целью дать систематизированные основы научных знаний по дисциплине, раскрыть состояние и перспективы прогресса конкретной области науки и экономики, сконцентрировать внимание на наиболее сложных и узловых вопросах. Эта цель определяет дидактическое назначение лекции, которое заключается в том, чтобы ознакомить обучающихся с основным содержанием, категориями, принципами и закономерностями изучаемой темы и предмета обучения в целом, его главными идеями и направлениями развития. Именно на лекции формируется научное мировоззрение обучающегося, закладываются теоретические основы фундаментальных знаний будущего управленца, стимулируется его активная познавательная деятельность, решается целый ряд вопросов воспитательного характера.

Каждая лекция должна представлять собой устное изложение лектором основных теоретических положений изучаемой дисциплины или отдельной темы как логически законченное целое и иметь конкретную целевую установку. Особое место в лекционном курсе по дисциплине занимают вводная и заключительная лекции.

Вводная лекция должна давать общую характеристику изучаемой дисциплины, подчеркивать новизну проблем, указывать ее роль и место в системе изучения других дисциплин, раскрывать учебные и воспитательные цели и кратко знакомить обучающихся с содержанием и структурой курса, а также с организацией учебной работы по нему. Заключительная лекция должна давать научно-практическое обобщение изученной дисциплины, показывать перспективы развития изучаемой области знаний, навыков и практических умений.

Практические занятия проводятся в целях выработки практических умений и приобретения навыков при решении задач. Основным содержанием этих занятий является практическая работа каждого обучающегося. Назначение практических занятий – закрепление, углубление и комплексное применение на практике теоретических знаний, выработка умений и навыков обучающихся в решении практических задач. Вместе с тем, на этих занятиях, осуществляется активное формирование и развитие навыков и качеств, необходимых для последующей профессиональной деятельности. Практические занятия проводятся по наиболее сложным вопросам дисциплины и имеют целью углубленно изучить ее содержание, привить обучающимся навыки самостоятельного поиска и анализа информации, умение делать обоснованные выводы, аргументировано излагать и отстаивать свое мнение. Каждое практическое занятие заканчивается, как правило, кратким подведением итогов, указаниями преподавателя о последующей самостоятельной работе.

Промежуточная аттестация по итогам освоения дисциплины проводится в виде экзамена 4 семестре. Экзамен позволяет оценить уровень освоения компетенций за весь период изучения дисциплины.

Рабочая программа дисциплины составлена в соответствии с требованиями ФГОС ВО по направлению подготовки 01.03.04 «Прикладная математика».

Программа рассмотрена и утверждена на заседании кафедры

№8 «Прикладная математика и информатика»

« 18 » 05 2021 года, протокол № 8 .

Разработчики:

д. ф.-м. н., профессор

(ученая степень, ученое звание, фамилия и инициалы разработчиков)

Береславский Э. Н.

Заведующий кафедрой № 8 Прикладной математики и информатики

к.т.н., доцент

(ученая степень, ученое звание, фамилия и инициалы заведующего кафедрой)

Далингер Я.М.

Программа согласована:

Руководитель ОПОП

к.т.н., доцент

(ученая степень, ученое звание, фамилия и инициалы руководителя ОПОП)

Далингер Я.М.

Программа рассмотрена и одобрена на заседании Учебно-методического совета Университета « 16 » июня 2021 года, протокол № 4 .