



**ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ВОЗДУШНОГО ТРАНСПОРТА  
(РОСАВИАЦИЯ)**

**ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ  
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ  
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
ГРАЖДАНСКОЙ АВИАЦИИ»**

**УТВЕРЖДАЮ**



Ю.Ю. Михальчевский

«17» ИЮНЯ 2021 года

## **РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ**

**Теория случайных процессов и основы теории  
массового обслуживания**

Направление подготовки  
**01.03.04 Прикладная математика**

Направленность программы (профиль)  
**Математическое и программное обеспечение систем управления**

Квалификация выпускника:  
**бакалавр**

Форма обучения:

**очная**

**Санкт-Петербург**

**2021**

## **1. Цели освоения дисциплины**

Целями освоения дисциплины «Теория случайных процессов и основы теории массового обслуживания» формирование представления о методах анализа систем массового обслуживания, создания их моделей, анализа полученных характеристик систем массового обслуживания по результатам использования модели.

Задачами освоения дисциплины являются:

- изучение и освоение основных теоретических методов и приёмов исследования систем массового обслуживания (СМО);
- обучение теории и практике моделирования СМО и определения их операционных характеристик;
- дальнейшее развитие логического и алгоритмического мышления;
- освоение принципов работы с современными средствами, предназначенными для проектирования моделей СМО;
- выработка умения самостоятельного решения задач по выбору метода и средства проектирования модели СМО, методов тестирования и определения качественных характеристик полученной модели;
- получение навыков в построении моделей СМО, в алгоритмизации задач, программировании и отладке программ, а также тестировании создаваемых программных модулей проектируемой модели СМО.

Дисциплина обеспечивает подготовку выпускника к научно-исследовательскому типу профессиональной деятельности.

## **2. Место дисциплины в структуре ОПОП ВО**

Дисциплина «Теория случайных процессов и основы теории массового обслуживания» представляет собой дисциплину, относящуюся к Обязательной части Блока 1 Дисциплины (модули).

Дисциплина «Теория случайных процессов и основы теории массового обслуживания» базируется на результатах обучения, полученных при изучении дисциплин: «Математический анализ», «Теория вероятностей и математическая статистика» «Дифференциальные уравнения», «Теория графов и математическая логика», «Теория игр».

Дисциплина «Теория случайных процессов и основы теории массового обслуживания» является обеспечивающей для дисциплин: «Вычислительная математика», «Цифровая обработка сигналов».

Дисциплина изучается в 5 семестре.

### 3. Компетенции обучающегося, формируемые в результате освоения дисциплины

Процесс освоения дисциплины «Теория случайных процессов и основы теории массового обслуживания» направлен на формирование следующих компетенций:

Перечень и код компетенций	Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине
ОПК-1	Способен применять знание фундаментальной математики и естественно-научных дисциплин при решении задач в области естественных наук и инженерной практике
ИД <sup>2</sup> <sub>ОПК1</sub>	Выбирает оптимальные методы фундаментальной математики при решении поставленных задач, в том числе в профессиональной сфере.
ОПК-2	Способен обоснованно выбирать, дорабатывать и применять для решения исследовательских и проектных задач математические методы и модели, осуществлять проверку адекватности моделей, анализировать результаты, оценивать надежность и качество функционирования систем
ИД <sup>2</sup> <sub>ОПК2</sub>	Оценивает построенную модель и ее адекватность применения в конкретной научно-исследовательской и проектной задаче, в том числе в профессиональной сфере.

Планируемые результаты изучения дисциплины:

Знать:

методику статистической обработки экспериментальных данных методами теории случайных процессов;

Уметь:

выполнять интерпретацию математических результатов для реальных систем;

Владеть:

умением самостоятельно расширять знания и проводить анализ задач.

#### 4. Объем дисциплины и виды учебной работы

Общая трудоемкость дисциплины составляет 3 зачетных единиц, 108 академических часов.

Наименование	Всего часов	Семестр
		5
Общая трудоемкость дисциплины	108	108
Контактная работа:	44,5	44,5
Лекции	14	14
практические занятия	24	24
Семинары		
лабораторные работы		
курсовой проект (работа)	4	4
Самостоятельная работа студента	30	30
Промежуточная аттестация	36	36
контактная работа	2,5	2,5
самостоятельная работа по подготовке к экзамену	33,5	33,5

#### 5. Содержание дисциплины

##### 5.1. Соотнесения тем (разделов) дисциплины и формируемых компетенций

Темы (разделы) дисциплины	Количество часов	Компетенции			
		ОПК-1	ОПК-2	Образовательные технологии	Оценочные средства
Тема 1. Основные понятия теории случайных процессов. Поток событий	10	+	+	Л, ВК СРС, ПЗ	ПАР
Тема 2. Корреляционная теория случайных процессов	8	+	+	Л, ПЗ, СРС	ПАР
Тема 3. Стационарные процессы	10	+	+	Л, ПЗ, СРС	ПАР
Тема 4. Случайные	10	+	+	Л, ПЗ,	ПАР

Темы (разделы) дисциплины	Количество часов	Компетенции			
		ОПК-1	ОПК-2	Образовательные технологии	Оценочные средства
последовательности (цепи Маркова, мартингалы). Марковские процессы.				СРС	
Тема 5. Общее описание систем массового обслуживания	10	+	+	Л, ПЗ, СРС	ПАР
Тема 6. Некоторые системы массового обслуживания	10	+	+	Л, ПЗ, СРС	ПАР
Тема 7. Основные понятия теории надежности	10	+	+	Л, ПЗ, СРС	ПАР
Всего по дисциплине	68				
Курсовая работа (проект)	4				
Промежуточная аттестация	36				
Итого по дисциплине	108				

Л – лекция, ПЗ – практическое занятие, СРС – самостоятельная работа студента, ВК – входной контроль, ПАР – письменная аудиторная работа.

## 5.2. Темы (разделы) дисциплины и виды занятий

Наименование раздела дисциплины	Л	ПЗ	ЛР	КР	СРС	Всего часов
Тема 1. Основные понятия теории случайных процессов. Поток событий.	2	4	-	2	4	12
Тема 2. Корреляционная теория случайных процессов	2	2	-	-	4	8
Тема 3. Стационарные процессы	2	4	-	-	4	10
Тема 4. Случайные последовательности (цепи Маркова, мартингалы). Марковские процессы.	2	2	-	-	6	10
Тема 5. Общее описание систем массового обслуживания	2	4	-	-	4	10
Тема 6. Некоторые системы массового обслуживания	2	4	-	-	4	10
Тема 7. Основные понятия теории надежности	2	4	-	2	4	12
Всего по дисциплине	14	24	-	4	30	72
Промежуточная аттестация						36
Итого по дисциплине						108

Л – лекция, ПЗ – практическое занятие, СРС – самостоятельная работа студента, ЛР – лабораторная работа, КР – курсовая работа (проект).

### **5.3 Содержание разделов дисциплины**

#### **Тема 1. Основные понятия теории случайных процессов. Потоки событий.**

Определение случайного процесса. Сечение и реализация. Задание случайного процесса. Классификация случайных процессов. Характеристики случайного процесса. Характеристики случайного векторного процесса. Основные понятия о потоках событий. Поток Эрланга.

#### **Тема 2. Корреляционная теория случайных процессов**

Задачи решаемые корреляционной теорией. Моменты первых двух порядков случайных процессов. Предел в среднем квадратическом случайного процесса. Непрерывность случайного процесса. Производная случайного процесса. Интеграл от случайного процесса. Линейные преобразования случайных процессов. Некоторые нелинейные преобразования случайных процессов.

#### **Тема 3. Стационарные процессы**

Стационарные процессы в узком смысле. Свойства стационарных процессов. Стационарные процессы в широком смысле. Непрерывность стационарного процесса. Производная стационарного процесса. Интеграл от стационарного процесса. Корреляционная функция связи стационарного процесса и его производных. Задачи о выбросах стационарного нормального процесса за данный уровень.

#### **Тема 4. Случайные последовательности (цепи Маркова, мартингалы). Марковские процессы.**

Безусловные вероятности состояний цепи Маркова. Уравнения Колмогорова – Чепмена. Дискретные цепи Маркова. Однородные дискретные цепи Маркова. Эргодическое свойство однородной дискретной цепи Маркова. Процесс Пуассона. Процесс размножения и гибели. Система дифференциальных уравнений Колмогорова для однородной цепи Маркова с непрерывным временем.

#### **Тема 5. Общее описание систем массового обслуживания**

Входящий поток. Стационарность, ординарность, отсутствие последействия. Простейший поток. Время обслуживания. Классификация систем массового обслуживания.

## Тема 6. Некоторые системы массового обслуживания

Задачи обслуживания в системах с отказами. Системы массового обслуживания с неограниченным числом обслуживающих аппаратов. Системы массового обслуживания с ожиданием и с ограниченным потоком требований. Системы массового обслуживания с ожиданием при условии, что очередь может быть неограниченно длинной. Системы массового обслуживания с ожиданием и с ограничением по длине очереди. Системы массового обслуживания с ожиданием и с ограниченным временем пребывания в очереди.

## Тема 7. Основные понятия теории надежности

Основные понятия теории надежности (основные определения). Надежность элемента, работающего до первого отказа. Надежность восстанавливаемого элемента. Надежность системы.

### 5.4 Практические занятия (семинары)

Номер темы дисциплины	Тематика практических занятий (семинаров)	Трудоемкость (часы)
1	Практическое занятие 1. Определение случайного процесса. Сечение и реализация. Задание случайного процесса. Характеристики случайного процесса. Характеристики случайного векторного процесса.	2
	Практическое занятие 2. Основные понятия о потоках событий. Поток Эрланга.	2
2	Практическое занятие 3. Задачи, решаемые корреляционной теорией. Моменты первых двух порядков случайных процессов. Предел в среднем квадратическом случайного процесса. Непрерывность случайного процесса. Производная случайного процесса. Интеграл от случайного процесса.	2
3	Практическое занятие 4. Применение свойств стационарных процессов. Непрерывность стационарного процесса. Производная стационарного процесса. Интеграл от стационарного процесса.	2
	Практическое занятие 5. Корреляционная функция связи стационарного процесса и его производных. Задачи о выбросах стационарного нормального процесса за данный уровень.	2

Номер темы дисциплины	Тематика практических занятий (семинаров)	Трудоемкость (часы)
4	Практическое занятие 6. Нахождение безусловных вероятностей состояний цепи Маркова. Уравнения Колмогорова – Чепмена. Дискретные цепи Маркова. Однородные дискретные цепи Маркова. Эргодическое свойство однородной дискретной цепи Маркова.	2
5	Практическое занятие 7-8. Входящий поток. Стационарность, ординарность, отсутствие последствия. Простейший поток. Время обслуживания. Классификация систем массового обслуживания.	4
6	Практическое занятие 9. Задачи обслуживания в системах с отказами. Системы массового обслуживания с неограниченным числом обслуживающих аппаратов. Системы массового обслуживания с ожиданием и с ограниченным потоком требований.	2
	Практическое занятие 10. Системы массового обслуживания с ожиданием и с ограничением по длине очереди. Системы массового обслуживания с ожиданием и с ограниченным временем пребывания в очереди.	2
7	Практическое занятие 11-12. Надежность элемента, работающего до первого отказа. Надежность восстанавливаемого элемента. Надежность системы.	4
Итого по дисциплине		24

### 5.5 Лабораторный практикум

Лабораторный практикум учебным планом не предусмотрен.



## 5.6 Самостоятельная работа

Номер темы дисциплины	Виды самостоятельной работы	Трудоемкость (часы)
1	1. Поиск, анализ информации и проработка учебного материала [2,3,5]. 2. Подготовка к письменной аудиторной работе. 3. Выполнение курсовой работы (проекта)	4
2	1. Поиск, анализ информации и проработка учебного материала [2, 4-9]. 2. Подготовка к письменной аудиторной работе. 3. Выполнение курсовой работы(проекта)	4
3	1. Поиск, анализ информации и проработка учебного материала [3, 5-9]. 2. Подготовка к письменной аудиторной работе. 3. Выполнение курсовой работы (проекта)	4
4	1. Поиск, анализ информации и проработка учебного материала [2,4]. 2. Подготовка к письменной аудиторной работе. 3. Выполнение курсовой работы (проекта)	6
5	1. Поиск, анализ информации и проработка учебного материала [1, 5 - 9]. 2. Подготовка к письменной аудиторной работе. 3. Выполнение курсовой работы (проекта)	4
6	1. Поиск, анализ информации и проработка учебного материала [1, 4]. 2. Подготовка к письменной аудиторной работе. 3. Выполнение курсовой работы (проекта)	4
7	1. Поиск, анализ информации и проработка учебного материала [1, 4, 5]. 2. Подготовка к письменной аудиторной работе. 3. Выполнение курсовой работы (проекта)	4
Итого по дисциплине		30

## 5.7 Курсовые работы (проекты)

Наименование этапа выполнения курсовой работы (проекта)	Трудоемкость (часы)
Этап 1. Выдача задания на курсовую работу (проект)	2
Этап 2. Выполнение раздела «Введение»	4
Этап 3. Выполнение раздела «Основная часть»	10
Этап 4. Выполнение разделов «Заключение», «Выводы».	4
Этап 5. Оформление курсовой работы (проекта)	2
Защита курсовой работы (проекта)	2
Итого по курсовой работе (проекту):	22
самостоятельная работа студента, отведенная на выполнение курсовой работы (проекта)	20
согласно учебному плану	4

## 6 Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины

а) основная литература:

1. Лифшиц, М.А. **Случайные процессы — от теории к практике** [Электронный ресурс] : учебное пособие / М.А. Лифшиц. — Электрон. дан. — Санкт-Петербург : Лань, 2016. — 320 с. — Режим доступа: <https://e.lanbook.com/book/71720> . — Загл. с экрана.

2. Хрущева, И.В. **Основы математической статистики и теории случайных процессов** [Электронный ресурс] : учебное пособие / И.В. Хрущева, В.И. Щербаков, Д.С. Леванова. — Электрон. дан. — Санкт-Петербург : Лань, 2009. — 336 с. — Режим доступа: <https://e.lanbook.com/book/426> . — Загл. с экрана.

3. Круглов, В. М. **Случайные процессы в 2 ч. Часть 1. Основы общей теории** : учебник для академического бакалавриата / В. М. Круглов. — 2-е изд., перераб. и доп. — М. : Издательство Юрайт, 2018. — 276 с. — (Серия : Авторский учебник). — ISBN 978-5-534-01748-9. — Режим доступа : [www.biblio-online.ru/book/6961A84E-3B4E-46CE-AE75-2DDCDE788763](http://www.biblio-online.ru/book/6961A84E-3B4E-46CE-AE75-2DDCDE788763) .

б) дополнительная литература

4. Круглов, В. М. **Случайные процессы в 2 ч. Часть 2. Основы стохастического анализа** : учебник для академического бакалавриата / В. М. Круглов. — 2-е изд., перераб. и доп. — М. : Издательство Юрайт, 2018. — 280 с. — (Серия : Авторский учебник). — ISBN 978-5-534-02086-1. — Режим доступа : [www.biblio-online.ru/book/0D8F2766-F866-4CEA-AE63-0B1F39288BF3](http://www.biblio-online.ru/book/0D8F2766-F866-4CEA-AE63-0B1F39288BF3) .

5. Попов, А. М. **Теория вероятностей : учебное пособие для прикладного бакалавриата** / А. М. Попов, В. Н. Сотников. — М. : Издательство Юрайт, 2018. — 215 с. — (Серия : Бакалавр. Прикладной курс). — ISBN 978-5-9916-9791-0. — Режим доступа : [www.biblio-online.ru/book/11F52DC6-D600-45E1-90DA-49E4BD49120B](http://www.biblio-online.ru/book/11F52DC6-D600-45E1-90DA-49E4BD49120B).

в) перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет»:

6. **Портал Математика** [Электронный ресурс] – Режим доступа: <https://math.ru/>, свободный (дата обращения: 20.01.2021 г.)

г) программное обеспечение (лицензионное), базы данных, информационно-справочные и поисковые системы

7. **Единое окно доступа к образовательным ресурсам** [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://window.edu.ru>, свободный (дата обращения: 20.01.2021 г.).

8. **Электронная библиотека научных публикаций «eLIBRARY.RU»** [Электронный ресурс] — Режим доступа: <http://elibrary.ru/>, свободный (дата обращения: 20.01.2021 г.).

9. **Электронно-библиотечная система издательства «Юрайт»** [Электронный ресурс] — Режим доступа: <https://biblio-online.ru>, свободный (дата обращения: 20.01.2021 г.).

## **7 Материально-техническое обеспечение дисциплины**

Компьютерные классы кафедры № 8 (ауд.: 800, 801, 803, 804) с доступом в Интернет, переносной проектор.

Информационно-справочные и материальные ресурсы библиотеки СПбГУ ГА.

Лицензионное программное обеспечение: Microsoft Office.

## **8 Образовательные и информационные технологии**

В рамках изучения дисциплины предполагается использовать следующие образовательные технологии.

Входной контроль проводится преподавателем в начале изучения дисциплины с целью коррекции процесса усвоения обучающимися дидактических единиц при изучении базовых дисциплин.

Лекция составляет основу теоретического обучения в рамках дисциплины и направлена на систематизированное изложение накопленных и актуальных научных знаний. Лекция предназначена для раскрытия состояния и перспектив развития экономических знаний в современных условиях. На лекции концентрируется внимание обучающихся на наиболее

сложных и узловых вопросах, стимулируется их активная познавательная деятельность.

Ведущим методом в лекции выступает устное изложение учебного материала, который сопровождается одновременной демонстрацией слайдов, при необходимости привлекаются открытые Интернет-ресурсы, а также демонстрационные и наглядно-иллюстрационные материалы и практические примеры.

Цель практических занятий – закрепить теоретические знания, полученные обучающимися на лекциях и в результате самостоятельного изучения соответствующих тем, а также приобрести начальные практические навыки. Рассматриваемые в рамках практического занятия задачи, ситуации, примеры и проблемы имеют профессиональную направленность и содержат элементы, необходимые для формирования компетенций в рамках подготовки обучающихся. Практические занятия предусматривают участие обучающихся в выполнении отдельных элементов работ, связанных с будущей профессиональной деятельностью.

Курсовой проект по дисциплине представляет собой самостоятельную учебно-исследовательскую работу студента и ставит цель систематизировать, закрепить и углубить теоретические и практические знания, умения и навыки по профилю подготовки с целью их применения для решения профессиональных задач.

Практические занятия и курсовой проект по дисциплине являются составляющими практической подготовки обучающихся, так как предусматривают их участие в выполнении отдельных элементов работ, связанных с будущей профессиональной деятельностью.

Самостоятельная работа обучающихся является составной частью учебной работы. Ее основной целью является формирование навыка самостоятельного приобретения знаний по некоторым вопросам теоретического курса, закрепление и углубление полученных знаний, самостоятельная работа со справочниками, периодическими изданиями и научно-популярной литературой. Самостоятельная работа включает выполнение учебных заданий, в том числе и индивидуальных, а также работу над курсовым проектом.

## **9 Фонд оценочных средств для проведения текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации по итогам освоения дисциплины**

Фонд оценочных средств дисциплины «Теория случайных процессов и основы теории массового обслуживания» представляет собой комплекс методических и контрольных измерительных материалов, предназначенных для определения качества результатов обучения и уровня сформированности компетенций обучающихся в ходе освоения данной дисциплины. В свою очередь, задачами использования фонда оценочных средств являются

осуществление как текущего контроля успеваемости студентов, так и промежуточной аттестации в форме экзамена.

Фонд оценочных средств дисциплины «Теория случайных процессов и основы теории массового обслуживания» для текущего контроля успеваемости включает письменную аудиторную работу и темы курсовых работ (проектов).

Письменная аудиторная работа предназначена для проверки умений и навыков применять полученные знания для решения практических задач.

Курсовая работа (проект) – авторский научно-исследовательский проект студента, направленный на выработку исследовательских навыков, опыта работы с научными источниками и создание законченного самостоятельного исследования. Оценочным средством являются темы курсовых работ (проектов), которые приведены в п. 9.3. Написание и защита курсовой работы (проекта) запланирована на 5 семестр.

Промежуточная аттестация по итогам освоения дисциплины проводится в виде экзамена в 5 семестре. Этот вид промежуточной аттестации позволяет оценить уровень освоения студентом компетенций за весь период изучения дисциплины. Экзамен предполагает устные ответы на 2 теоретических вопроса из перечня вопросов, вынесенных на промежуточную аттестацию, а также решение задачи.

### **9.1. Балльно-рейтинговая оценка текущего контроля успеваемости и знаний студентов**

Не применяется.

### **9.2 Методические рекомендации по проведению процедуры оценивания знаний, умений и навыков и (или) опыта деятельности, характеризующих этапы формирования компетенций**

Устный опрос оценивается следующим образом:

«зачтено»: обучающийся дает ответ на поставленный вопрос по существу и правильно отвечает на уточняющие вопросы;

«не зачтено»: обучающийся отказывается отвечать на поставленный вопрос, либо отвечает на него неверно и при формулировании дополнительных (вспомогательных) вопросов.

Решение ситуационных задач оценивается:

«зачтено»: обучающийся самостоятельно правильно решает задачу, дает обоснованную оценку по итогу решения;

«не зачтено»: обучающийся отказывается от выполнения задачи или не способен ее решить самостоятельно, а также с помощью преподавателя.

Письменная аудиторная работа:

«зачтено»: работа зачитывается в том случае, если задание выполнено полностью, в соответствии с поставленными требованиями и сделаны необходимые выводы;

«не зачтено»: работа не зачитывается в том случае, если обучающийся не выполнил задания, или результат выполнения задания не соответствует поставленным требованиям, а в заданиях и (или) ответах имеются существенные ошибки.

### **9.3 Темы курсовых работ (проектов) по дисциплине**

1. Основные характеристики случайного процесса.
2. Стационарный случайный процесс в узком и широком смысле.
3. Линейные и нелинейные преобразования случайных процессов.
4. Дифференцирование и интегрирование случайных процессов.
5. Спектральное разложение случайного процесса.
6. Спектральная плотность случайного процесса. Теорема Винера-Хинчина.
7. Стационарный белый шум.
8. Понятие марковского случайного процесса. Дискретный марковский процесс. Цепь Маркова.
9. Непрерывный марковский процесс. Уравнения Колмогорова.
10. Пуассоновские потоки событий.
11. Процесс гибели и размножения.
12. Циклический процесс.
13. Одноканальная система массового обслуживания с отказами.
14. Многоканальная система массового обслуживания с отказами.
15. Формулы Эрланга.

### **9.4 Контрольные задания для проведения входного контроля остаточных знаний по обеспечивающим дисциплинам**

1. Сформулируйте классическое определение вероятности. В чем ограниченность этого определения? В чем различие между вероятностью и относительной частотой?
2. Когда применяют геометрическое определение вероятности? Почему в этих случаях нельзя пользоваться классическим определением?
3. Дайте определение суммы событий. Приведите примеры: суммы двух несовместных событий; суммы двух совместных событий.
4. Сформулируйте и докажите теорему о сложении вероятностей несовместных событий.
5. Дайте определение произведения событий. Приведите примеры: произведения двух независимых событий; произведения двух зависимых событий.
6. Что такое условная вероятность?

7. Сформулируйте теорему об умножении вероятностей для двух событий (общий случай). Какую форму принимает эта теорема в случае, когда события независимы?

8. Приведите формулу полной вероятности.

9. Приведите формулы Байеса.

10. Что такое схема Бернулли?

11. В каких случаях применяются: формула Бернулли; теорема Пуассона; теорема Муавра-Лапласа?

### 9.5 Описание показателей и критериев оценивания компетенций на различных этапах их формирования, описание шкал оценивания

Компетенции	Показатели оценивания (индикаторы достижения) компетенций	Критерии оценивания
I этап		
ОПК-1	ИД <sup>2</sup> <sub>ОПК1</sub>	<p>Знает:</p> <p>основы математического аппарата, используемого при исследовании случайных процессов; основы теории случайных процессов, цепи Маркова;</p> <p>Умеет:</p> <p>основы теории случайных процессов, цепи Маркова;</p> <p>проводит простейшие вычисления вероятностно-статистических характеристик с использованием соответствующего программного продукта.</p>
II этап		
ОПК-2	ИД <sup>2</sup> <sub>ОПК2</sub>	<p>Умеет:</p> <p>проводит простейшие вычисления вероятностно-статистических характеристик с использованием соответствующего программного продукта;</p> <p>проводит простейшие вычисления вероятностно-статистических характеристик с использованием соответствующего программного продукта.</p> <p>Владеет:</p> <p>навыками рассчитывать параметры пуассоновского процесса;</p> <p>умением выбирать информационные источники для самостоятельного поиска информации по конкретной задаче.</p>

## Шкала оценивания при проведении промежуточной аттестации

*«Отлично»* выставляется обучающемуся, показавшему всесторонние, систематизированные, глубокие знания по рассматриваемой компетенции и умение уверенно применять их на практике при решении задач, свободное и правильное обоснование принятых решений. Отвечая на вопрос, может быстро и безошибочно проиллюстрировать ответ собственными примерами. Обучающийся самостоятельно правильно решает задачу, дает обоснованную оценку итогам решения.

*«Хорошо»* выставляется обучающемуся, если он твердо знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задачи некоторые неточности, хорошо владеет всем содержанием, видит взаимосвязи, но не всегда делает это самостоятельно без помощи преподавателя. Обучающийся решает задачу верно, но при помощи преподавателя.

*«Удовлетворительно»* выставляется обучающемуся, показавшему фрагментарный, разрозненный характер знаний, недостаточно правильные формулировки базовых понятий, нарушения логической последовательности в изложении программного материала, но при этом он владеет основными разделами учебной программы в рамках заданной компетенции, необходимыми для дальнейшего обучения и может применять полученные знания по образцу в стандартной ситуации. Отвечает только на конкретный вопрос, соединяет знания из разных разделов курса только при наводящих вопросах преподавателя. Ситуационная задача решена не полностью, или содержатся незначительные ошибки в расчетах.

*«Неудовлетворительно»* выставляется обучающемуся, который не знает большей части основного содержания учебной программы дисциплины в рамках компетенций, допускает грубые ошибки в формулировках основных понятий дисциплины и не умеет использовать полученные знания при решении типовых практических задач. Не раскрыты глубина и полнота при ответах. Задача не решена даже при помощи преподавателя.

## Шкала оценивания курсового проекта



Шкала оценивания	Составляющие	Признаки
Отлично	Практическая часть	Обучающийся показывает умения и навыки выполнения расчетов необходимых показателей для формирования разделов финансовой отчетности. Расчеты в курсовом проекте обоснованы и выполнены правильно на 90-100 %.
	Выводы	Выводы грамотно сформулированы и обоснованы.
	Использованные источники	Использованные источники подобраны грамотно, имеются нормативные источники. Их количество соответствует требованиям к курсовому проекту.
	Оформление	Курсовой проект оформлен аккуратно согласно требованиям к оформлению без орфографических и грамматических ошибок.
	Своевременность выполнения	Курсовой проект выполнен и сдан на проверку своевременно.
	Защита	Доступно и ясно представляет результаты курсового проекта. Ответы на вопросы полные, глубокие. Обучающийся всесторонне оценивает и интерпретирует полученные результаты, доказывает их значимость. Грамотно и аргументировано представляет комментарии к расчетам.
Хорошо	Практическая часть	Обучающийся показывает умения и навыки выполнения расчетов необходимых показателей для формирования разделов финансовой отчетности. Расчеты в курсовом проекте обоснованы и выполнены правильно на 80-90 %.
	Выводы	Выводы сформулированы с небольшими неточностями.
	Использованные источники	Использованные источники подобраны грамотно. Их количество

Шкала оценивания	Составляющие	Признаки
		соответствует требованиям к курсовому проекту.
	Оформление	Курсовой проект оформлен аккуратно согласно требованиям к оформлению с небольшим количеством орфографических и грамматических ошибок.
	Своевременность выполнения	Курсовой проект выполнен и сдан на проверку своевременно.
	Защита	Доступно и ясно представляет результаты курсового проекта. Ответы на вопросы полные. Обучающийся оценивает и интерпретирует полученные результаты с незначительными неточностями, Демонстрирует самостоятельное мышление.
Удовлетворительно	Практическая часть	Обучающийся показывает слабые навыки выполнения расчетов необходимых показателей, формирования разделов финансовой отчетности. Расчеты обоснованы и выполнены правильно на 70-80 %.
	Выводы	Выводы сформулированы со значительными неточностями или не все выводы сформулированы.
	Использованные источники	Использованные источники подобраны небрежно. Их количество меньше, чем соответствует требованиям к курсовому проекту.
	Оформление	Курсовой проект оформлен неаккуратно с большим количеством орфографических и грамматических ошибок.
	Своевременность выполнения курсового проекта	Курсовой проект выполнен и сдан на проверку позже указанного срока.
	Защита	Обучающийся с трудом докладывает результаты курсового проекта. Ответы на вопросы неполные. Обучающийся не может оценить полученные результаты и

Шкала оценивания	Составляющие	Признаки
		интерпретирует их со значительными неточностями.
Неудовлетворительно	Практическая часть	Обучающийся не демонстрирует умения и навыки расчетов необходимых показателей, расчеты выполнены с большим количеством ошибок или не в полном объеме.
	Выводы	Выводы не сформулированы.
	Использованные источники	Использованные источники не соответствуют теме.
	Оформление	Оформление курсового проекта не соответствует требованиям. Большое количество орфографических и грамматических ошибок.
	Защита	Обучающийся не может представить результаты курсового проекта. Не отвечает на вопросы или отвечает неверно.

## 9.6 Типовые контрольные задания для проведения текущего контроля и промежуточной аттестации по итогам освоения дисциплины

### 9.6.1 Примерные контрольные задания для проведения текущего контроля успеваемости

#### Примерный перечень вопросов устного опроса

1. Поток событий. Простейший поток и его свойства: стационарность, ординарность, отсутствие последствия.
2. Распределение интервала времени между двумя последовательными событиями в простейшем потоке. Числовые характеристики распределения.
3. Потоки событий, не являющиеся простейшими. Нестационарный пуассоновский поток.
4. Потоки событий, не являющиеся простейшими. Потоки Эрланга.
5. Потоки событий, не являющиеся простейшими. Регулярный и нормированный потоки.
6. Потоки событий, не являющиеся простейшими. Поток Пальма. Плотность распределения времени ожидания первого ближайшего события в потоке.

## Примерный вариант письменной аудиторной работы

**1–10.** Среднее число вызовов, поступающих на станцию скорой помощи за один час, равно  $\lambda$ . Поток вызовов простейший. Найти:

а) математическое ожидание, дисперсию, среднее квадратическое отклонение непрерывной случайной величины  $T$  – интервала времени между двумя последовательными вызовами в потоке;

б) вероятность того, что за  $t$  минут поступит:  $m$  вызовов; менее  $m$  вызовов; не менее  $m$  вызовов.

1.  $\lambda = 60, t = 6, m = 3$ .
2.  $\lambda = 40, t = 6, m = 4$ .
3.  $\lambda = 30, t = 10, m = 2$ .
4.  $\lambda = 15, t = 12, m = 4$ .
5.  $\lambda = 30, t = 4, m = 3$ .
6.  $\lambda = 20, t = 9, m = 3$ .
7.  $\lambda = 35, t = 12, m = 4$ .
8.  $\lambda = 25, t = 12, m = 3$ .
9.  $\lambda = 10, t = 24, m = 2$ .
10.  $\lambda = 50, t = 6, m = 4$ .

**11–20.** Электронное устройство работает в ждущем режиме и переключается очередным импульсом. Поток импульсов является потоком Эрланга  $k$ -го порядка с интенсивностью  $\lambda_k$  импульсов в час. В случайный момент времени устройство включается в сеть и ждет первого очередного импульса. Найти плотность распределения вероятностей времени ожидания очередного импульса и построить ее график. Вычислить вероятность того, что устройство останется в ждущем режиме не более  $t$  минут. Ответ дать с тремя десятичными знаками.

*Указание:* плотность распределения времени ожидания первого очередного события для потока Эрланга  $k$ -го порядка имеет вид

$$f(x) = \frac{\lambda}{k} \sum_{s=0}^{k-1} \frac{(\lambda \theta)^s}{s!} e^{-\lambda \theta}, \quad \theta \geq 0,$$

где  $\lambda$  – интенсивность простейшего потока, из которого получен поток Эрланга  $k$ -го порядка.

11.  $k = 3, \lambda_k = 2, t = 10$ .
12.  $k = 2, \lambda_k = 3, t = 5$ .
13.  $k = 3, \lambda_k = 1, t = 6$ .
14.  $k = 2, \lambda_k = 2, t = 12$ .
15.  $k = 3, \lambda_k = 3, t = 15$ .
16.  $k = 2, \lambda_k = 0,5, t = 10$ .
17.  $k = 3, \lambda_k = 1,5, t = 5$ .
18.  $k = 2, \lambda_k = 2,5, t = 20$ .

19.  $k = 3, \lambda_k = 0,5, t = 12.$

20.  $k = 2, \lambda_k = 1,5, t = 15.$

21–30. Задана матрица  $P$  вероятностей перехода дискретной цепи Маркова за один шаг. Распределение вероятностей по состояниям в начальный момент определяется вектором  $\vec{q}$ . Построить размеченный граф состояний. Найти:

- 1) матрицу  $P_2$  переходов цепи за два шага;
- 2) распределение вероятностей по состояниям в конце второго шага;
- 3) вероятность пребывания цепи в третьем состоянии в конце первого шага;
- 4) стационарное распределение вероятностей.

21.  $P = \begin{pmatrix} 0,1 & 0,1 & 0,8 \\ 0 & 0,3 & 0,7 \\ 0,6 & 0,2 & 0,2 \end{pmatrix}, \vec{q} = (0,7 \quad 0,2 \quad 0,1).$

22.  $P = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,3 & 0,4 \\ 0,3 & 0 & 0,7 \\ 0,5 & 0,5 & 0 \end{pmatrix}, \vec{q} = (0,3 \quad 0,2 \quad 0,5).$

23.  $P = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,2 & 0 \\ 0,1 & 0,6 & 0,3 \\ 0,1 & 0,4 & 0,5 \end{pmatrix}, \vec{q} = (0,4 \quad 0,4 \quad 0,2).$

24.  $P = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,3 & 0,5 \\ 0 & 0,7 & 0,3 \\ 0,3 & 0,4 & 0,3 \end{pmatrix}, \vec{q} = (0,2 \quad 0,2 \quad 0,6).$

25.  $P = \begin{pmatrix} 0 & 0,5 & 0,5 \\ 0,2 & 0,1 & 0,7 \\ 0,3 & 0,5 & 0,2 \end{pmatrix}, \vec{q} = (0,4 \quad 0,3 \quad 0,3).$

26.  $P = \begin{pmatrix} 0,9 & 0,1 & 0 \\ 0,8 & 0,1 & 0,1 \\ 0,3 & 0,3 & 0,4 \end{pmatrix}, \vec{q} = (0,2 \quad 0,4 \quad 0,4).$

27.  $P = \begin{pmatrix} 0,6 & 0,2 & 0,2 \\ 0,4 & 0,3 & 0,3 \\ 0,2 & 0,8 & 0 \end{pmatrix}, \vec{q} = (0,1 \quad 0,5 \quad 0,4).$

28.  $P = \begin{pmatrix} 0,1 & 0,2 & 0,7 \\ 0,5 & 0,2 & 0,3 \\ 0,9 & 0,1 & 0 \end{pmatrix}, \vec{q} = (0,3 \quad 0,1 \quad 0,6).$

$$29. P = \begin{pmatrix} 0,4 & 0,1 & 0,5 \\ 0,3 & 0,7 & 0 \\ 0,2 & 0,2 & 0,6 \end{pmatrix}, \vec{q} = (0,9 \ 0 \ 0,1).$$

$$30. P = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,5 & 0,3 \\ 0,6 & 0 & 0,4 \\ 0 & 0,9 & 0,1 \end{pmatrix}, \vec{q} = (0,1 \ 0,8 \ 0,1).$$

**31 – 40.** Задана матрица  $\Lambda$  интенсивностей переходов непрерывной цепи Маркова. Построить размеченный граф состояний. Провести классификацию состояний системы. Найти стационарное распределение вероятностей, если оно существует.

$$31. \Lambda = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -5 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -4 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & -6 & 0 & 0 \\ 9 & 0 & 0 & 7 & -16 & 0 \\ 0 & 0 & 11 & 3 & 0 & -14 \end{pmatrix}.$$

$$32. \Lambda = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -3 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & -6 & 0 & 0 \\ 7 & 0 & 2 & -9 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & -4 \end{pmatrix}.$$

$$33. \Lambda = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & 0 & 7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 9 & 3 & -20 \end{pmatrix}.$$

$$34. \Lambda = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 2 & 0 \\ 7 & 0 & -13 & 6 & 0 \\ 3 & 5 & 0 & -8 & 0 \\ 0 & 8 & 0 & 9 & -17 \end{pmatrix}.$$

$$35. \Lambda = \begin{pmatrix} -9 & 2 & 0 & 4 & 0 & 3 \\ 0 & -10 & 3 & 7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -8 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot$$

$$36. \Lambda = \begin{pmatrix} -5 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -7 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 7 & 8 & 0 & -18 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 & -16 & 11 \\ 0 & 0 & 6 & 0 & 0 & -6 \end{pmatrix} \cdot$$

$$37. \Lambda = \begin{pmatrix} -5 & 3 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & -9 & 0 & 2 \\ 0 & 5 & 0 & -5 & 0 \\ 6 & 3 & 0 & 0 & -9 \end{pmatrix} \cdot$$

$$38. \Lambda = \begin{pmatrix} -4 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -11 & 4 & 7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & -7 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 9 & 6 & -15 \end{pmatrix} \cdot$$

$$39. \Lambda = \begin{pmatrix} -7 & 0 & 0 & 7 & 0 & 0 \\ 0 & -11 & 0 & 0 & 11 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 5 & -5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -11 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 7 & 0 & -7 \end{pmatrix} \cdot$$

$$40. \Lambda = \begin{pmatrix} -9 & 7 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & -9 & 5 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & 3 \\ 4 & 0 & 6 & -15 & 5 \\ 0 & 1 & 7 & 0 & -8 \end{pmatrix}.$$

**41–50.** В компьютерном зале  $l$  персональных компьютеров. Зал эксплуатируется 12 часов в сутки. Интенсивность потока отказов одного компьютера равна  $\lambda$  компьютеров в сутки. Время восстановления одного компьютера одним мастером в среднем составляет  $T$  часов. Все потоки простейшие. Определить оптимальное число обслуживающих зал мастеров по ремонту, если производительность зала оценивается по формуле

$$P_{\text{зала}} = \frac{l - \bar{l}_{\text{сл}}}{l} \cdot 100\%,$$

где  $l$  - число персональных компьютеров,  $\bar{l}_{\text{сл}}$  - среднее число неисправных компьютеров.

*Указание:* экономически оправдан прием на работу еще одного мастера, если он обеспечивает прирост производительности зала не менее чем на 10% от номинальной.

**41.**  $l = 6, \lambda = 0,2, T = 36.$

**42.**  $l = 5, \lambda = 0,2, T = 30.$

**43.**  $l = 4, \lambda = 0,2, T = 24.$

**44.**  $l = 6, \lambda = 0,15, T = 48.$

**45.**  $l = 5, \lambda = 0,3, T = 20.$

**46.**  $l = 4, \lambda = 0,1, T = 48.$

**47.**  $l = 6, \lambda = 0,3, T = 24.$

**48.**  $l = 5, \lambda = 0,15, T = 40.$

**49.**  $l = 4, \lambda = 0,16, T = 30.$

**50.**  $l = 6, \lambda = 0,24, T = 30.$

**51–60.** В отделе  $k$  телефонных аппаратов. Среднее число поступающих в отдел вызовов равно  $\lambda$  вызовов в час. Входной поток простейший. Время переговоров распределено по показательному закону и в среднем составляет  $T$  минут. Определить: 1) вероятность отказа в переговорах; 2) абсолютную пропускную способность системы; 3) относительную пропускную способность; 4) среднее число занятых аппаратов; 5) коэффициент загрузки оборудования

$$\frac{\bar{k}}{k} \cdot 100\%.$$

Как изменятся эти показатели работы системы, если в отделе добавить еще один аппарат? Сколько аппаратов необходимо добавить, чтобы отказ получали не более 10% вызовов?

**51.**  $k = 3, \lambda = 20, T = 10.$

**52.**  $k = 2, \lambda = 15, T = 12.$



53.  $k = 2, \lambda = 8, T = 15.$   
 54.  $k = 3, \lambda = 10, T = 18.$   
 55.  $k = 2, \lambda = 5, T = 24.$   
 56.  $k = 4, \lambda = 24, T = 10.$   
 57.  $k = 3, \lambda = 15, T = 12.$   
 58.  $k = 4, \lambda = 30, T = 12.$   
 59.  $k = 2, \lambda = 10, T = 18.$   
 60.  $k = 3, \lambda = 25, T = 6.$

**61–70.** Разработчик СМО располагает двумя каналами обслуживания. Интенсивность обслуживания одним каналом  $\mu$  заявок в час. Время обслуживания распределено по показательному закону. Входящий поток заявок простейший с интенсивностью  $\lambda$  заявок в час. Возможны два варианта проекта: вариант 1 – две независимо работающих одноканальных безотказных СМО( 1;  $\infty$  ;  $\lambda/2$  ;  $\mu$  ); вариант 2 – одна двухканальная безотказная СМО( 2 ;  $\infty$  ;  $\lambda$  ;  $\mu$  ). Провести сравнительный анализ вариантов по следующим показателям эффективности: среднее число занятых каналов; средняя длина очереди; среднее время пребывания заявки в системе.

Провести аналогичный сравнительный анализ в том случае, если при тех же условиях разработчик располагает средствами для организации  $m$  мест в очереди для ожидания обслуживания. Рассмотреть два варианта: вариант 1 – две независимо работающих одноканальных СМО( 1;  $m/2$  ;  $\lambda/2$  ;  $\mu$  ); вариант 2 – одна двухканальная СМО( 2 ;  $m$ ;  $\lambda$  ;  $\mu$  ).

*Указание:* всюду вектор  $(a_1; a_2; a_3; a_4)$  имеет компоненты:  $a_1$  – число каналов обслуживания;  $a_2$  – число мест в очереди;  $a_3$  – интенсивность входного потока;  $a_4$  – интенсивность потока обслуживания.

61.  $\lambda = 8, \mu = 5, m = 6.$   
 62.  $\lambda = 6, \mu = 5, m = 4.$   
 63.  $\lambda = 6, \mu = 4, m = 6.$   
 64.  $\lambda = 8, \mu = 7, m = 4.$   
 65.  $\lambda = 10, \mu = 6, m = 6.$   
 66.  $\lambda = 10, \mu = 7, m = 4.$   
 67.  $\lambda = 8, \mu = 6, m = 4.$   
 68.  $\lambda = 12, \mu = 7, m = 6.$   
 69.  $\lambda = 4, \mu = 3, m = 4.$   
 70.  $\lambda = 10, \mu = 8, m = 4.$

**71–80.** В двухканальную систему массового обслуживания (СМО) с отказами поступает стационарный пуассоновский поток заявок с интенсивностью  $\lambda$  заявок в минуту. Длительность обслуживания каждой заявки равна  $(0,5 + \tau_i)$  минут, где  $\tau_i$  – непрерывная случайная величина, закон распределения которой неизвестен. Статистическое распределение выборки  $\{\tau_i\}$  объема  $n = 100$  имеет вид

$\tau_i$ ,МИН	[0; 0,1)	[0,1 ; 0,2)	[0,2 ; 0,3)	[0,3 ; 0,4)	[0,4 ; 0,5)
$n_i$	10	25	35	15	15

Вновь прибывшая заявка занимает свободный канал с меньшим номером. При занятости всех каналов заявка покидает СМО необслуженной. Требуется: 1) построить эмпирическую функцию распределения случайной величины  $\tau_i$ ; 2) методом обратных функций смоделировать входящий поток и поток обслуживания; 3) смоделировать работу СМО методом Монте-Карло; 4) по результатам трех испытаний найти среднее число обслуженных заявок за время  $T$ ; 5) к одному из испытаний (любому) построить временные диаграммы работы СМО.

*Указание:* воспользоваться таблицей случайных чисел, приведенной на стр. 24 – 25. В числовых данных задачи:  $i$  – номер строки,  $j$  – номер столбца для первого случайного числа  $r_{ij}$ . Выбор случайных чисел проводить по строкам, начиная с числа  $r_{ij}$ , без пропусков и вставок.

71.  $\lambda = 2, T = 5, i = 1, j = 2.$

72.  $\lambda = 3, T = 4, i = 2, j = 4.$

73.  $\lambda = 4, T = 3, i = 3, j = 6.$

74.  $\lambda = 5, T = 3, i = 4, j = 8.$

75.  $\lambda = 2, T = 6, i = 5, j = 10.$

76.  $\lambda = 3, T = 5, i = 6, j = 12.$

77.  $\lambda = 4, T = 4, i = 7, j = 14.$

78.  $\lambda = 5, T = 4, i = 8, j = 16.$

79.  $\lambda = 2, T = 4, i = 9, j = 18.$

80.  $\lambda = 3, T = 3, i = 10, j = 20.$

81. Найти спектральную плотность стационарной случайной функции  $X(t)$ , если ее корреляционная функция имеет вид

$$82. k_x(\tau) = \begin{cases} 1 - |\tau|, & |\tau| \leq 1, \\ 0, & |\tau| > 1. \end{cases}$$

$$83. k_x(\tau) = e^{-|\tau|}.$$

$$84. k_x(\tau) = \begin{cases} 1 - 0,2|\tau|, & |\tau| \leq 5, \\ 0, & |\tau| > 5. \end{cases}$$

$$85. k_x(\tau) = e^{-2|\tau|}.$$

$$86. k_x(\tau) = \begin{cases} 1 - 0,5|\tau|, & |\tau| \leq 2, \\ 0, & |\tau| > 2. \end{cases}$$

$$87. k_x(\tau) = e^{-0,3|\tau|}.$$

$$k_x(\tau) = \begin{cases} 1 - 0,25|\tau|, & |\tau| \leq 4, \\ 0, & |\tau| > 4. \end{cases}$$

$$k_x(\tau) = e^{-0.2|\tau|}.$$

$$88. k_x(\tau) = \begin{cases} 1 - 2|\tau|, & |\tau| \leq \frac{1}{2}, \\ 0, & |\tau| > \frac{1}{2}. \end{cases}$$

$$89. k_x(\tau) = e^{-0.5|\tau|}.$$

**90-99.** На вход линейной стационарной динамической системы, описываемой данным дифференциальным уравнением, подается стационарная случайная функция  $X(t)$  с математическим ожиданием  $m_x$  и корреляционной функцией  $k_x(\tau)$ . Найти: а) математическое ожидание; б) дисперсию случайной функции  $Y(t)$  на выходе системы в установившемся режиме.

<b>90.</b> $Y'(t) + 3Y(t) = X'(t) + 4X(t),$	$m_x = 6,$	$k_x(\tau) = 5e^{-2 \tau }.$
<b>91.</b> $3Y'(t) + Y(t) = 4X'(t) + X(t),$	$m_x = 5,$	$k_x(\tau) = 6e^{-2 \tau }.$
<b>92.</b> $Y'(t) + 2Y(t) = 5X'(t) + 6X(t),$	$m_x = 5,$	$k_x(\tau) = e^{- \tau }.$
<b>93.</b> $3Y'(t) + 5Y(t) = X'(t) + X(t),$	$m_x = 2,$	$k_x(\tau) = 2e^{-3 \tau }.$
<b>94.</b> $2Y'(t) + Y(t) = X'(t) + 3X(t),$	$m_x = 4,$	$k_x(\tau) = 3e^{- \tau }.$
<b>95.</b> $Y'(t) + 3Y(t) = 3X'(t) + X(t),$	$m_x = 9,$	$k_x(\tau) = 5e^{-3 \tau }.$
<b>96.</b> $4Y'(t) + 3Y(t) = X'(t) + 2X(t),$	$m_x = 3,$	$k_x(\tau) = e^{-5 \tau }.$
<b>97.</b> $Y'(t) + 3Y(t) = 3X'(t) + X(t),$	$m_x = 12,$	$k_x(\tau) = e^{-2 \tau }.$
<b>98.</b> $2Y'(t) + 3Y(t) = X'(t) + 5X(t),$	$m_x = 3,$	$k_x(\tau) = 2e^{-5 \tau }.$
<b>99.</b> $Y'(t) + 4Y(t) = 3X'(t) + 2X(t),$	$m_x = 8,$	$k_x(\tau) = 3e^{-2 \tau }.$

### 9.6.2 Контрольные вопросы промежуточной аттестации по итогам освоения дисциплины

7. Поток событий. Простейший поток и его свойства: стационарность, ординарность, отсутствие последствия.

8. Распределение интервала времени между двумя последовательными событиями в простейшем потоке. Числовые характеристики распределения.

9. Потоки событий, не являющиеся простейшими. Нестационарный пуассоновский поток.

10. Потоки событий, не являющиеся простейшими. Потоки Эрланга.

11. Потоки событий, не являющиеся простейшими. Регулярный и нормированный потоки.

12. Потоки событий, не являющиеся простейшими. Поток Пальма. Плотность распределения времени ожидания первого ближайшего события в потоке.

13. Цепи Маркова с конечным числом состояний и дискретным временем. Вероятности переходов. Размеченный граф состояний.
14. Цепи Маркова с конечным числом состояний и дискретным временем. Нахождение стационарного распределения.
15. Цепи Маркова с конечным числом состояний и непрерывным временем. Плотность вероятности переходов. Матрица интенсивностей переходов.
16. Цепи Маркова с конечным числом состояний и непрерывным временем. Система дифференциальных уравнений Колмогорова. Размеченный граф состояний.
17. Цепи Маркова с конечным числом состояний и непрерывным временем. Нахождение стационарного распределения с помощью СДУК и по размеченному графу состояний.
18. Классификация состояний системы. Эргодическое подмножество состояний и его свойства. Концевое подмножество.
19. Эргодический процесс. Теорема Маркова и ее следствия. Применение теоремы Маркова для расчета стационарного распределения.
20. Процесс «гибели и размножения». Вычисление предельных вероятностей.
21. Стационарное распределение вероятностей по состояниям в процессе «гибели и размножения» в случае, когда число состояний конечно.
22. Предмет теории массового обслуживания. Основные понятия: заявка, канал обслуживания, система массового обслуживания (СМО).
23. Классификация СМО в зависимости от поведения заявки в системе. СМО с отказами, безотказные СМО, СМО смешанного типа.
24. Классификация СМО в зависимости от характера источника заявок. Открытые и замкнутые СМО.
25. Классификация СМО в зависимости от дисциплины ожидания и обслуживания. Беспriorитетные СМО и СМО с приоритетами.
26. Параметры и характеристики СМО: параметры входящего потока; параметры структуры СМО. Теорема о суммарном потоке.
27. Показатели эффективности СМО. Формула Литтла.
28. Многоканальная СМО с отказами. Задача Эрланга. Формулы Эрланга.
29. Одноканальная СМО с ограниченной очередью. Расчет стационарного распределения и показателей эффективности.
30. Многоканальная СМО с ограниченной очередью. Расчет стационарного распределения и показателей эффективности.
31. Одноканальная СМО с неограниченной очередью. Условия существования стационарного распределения. Расчет показателей эффективности.
32. Многоканальная СМО с неограниченной очередью. Условия существования стационарного распределения. Расчет показателей эффективности.

33. Немарковские СМО. Одноканальная СМО с неограниченной очередью, простейшим входящим потоком и произвольным распределением времени обслуживания. Формулы Полячека-Хинчина.

34. Статистическое моделирование (метод Монте-Карло). Случайные числа, их получение. Разыгрывание дискретной случайной величины.

35. Статистическое моделирование (метод Монте-Карло). Случайные числа, их получение. Разыгрывание полной группы событий.

36. Статистическое моделирование (метод Монте-Карло). Случайные числа, их получение. Разыгрывание непрерывной случайной величины методом обратных функций.

37. Статистическое моделирование (метод Монте-Карло). Случайные числа, их получение. Разыгрывание нормальной случайной величины.

38. Имитационное моделирование работы СМО методом Монте-Карло. Построение временных диаграмм.

39. Имитационное моделирование работы СМО методом Монте-Карло. Расчет трехканальной СМО с отказами.

40. Приведите примеры случайных процессов четырех различных видов.

41. Что такое сечение случайной функции?

42. Перечислите характеристики случайных функций.

43. Что называется корреляционной (автокорреляционной) функцией с.ф. Что она характеризует?

44. Что такое центрированные и нормированные характеристики с.ф.?

45. Какие случайные функции называются элементарными?

46. В чем заключается идея метода канонических разложений случайных функций?

47. Когда применяются интегральные канонические представления?

48. Сформулируйте правило линейного преобразования канонического разложения с.ф.

49. Дайте определения характеристик комплексной случайной величины. Как их вычислить по характеристикам мнимой и действительной части?

50. Какой случайный процесс называется стационарным? Какими свойствами обладает автокорреляционная функция стационарного с.п.?

51. Что такое спектр дисперсий с.ф. ?

52. Когда пользуются нормированной спектральной плотностью стационарной с.ф.?

53. Что называется частотной характеристикой линейной системы?

54. Сформулируйте правило преобразования стационарной случайной функции стационарной линейной системой.

55. В чем состоит эргодическое свойство стационарных случайных функций? Почему для определения характеристик такой функции достаточно одной реализации?

## **Типовые задачи для промежуточной аттестации:**

### **Задача 1**

В процессе эксплуатации ЭВМ возникают неисправности (сбои). Поток сбоев считаем простейшим. Среднее число сбоев за сутки равно  $m = 1,5$ . Найти вероятности следующих событий:

A – за  $n = 2$  суток нет ни одного сбоя;

B – за одни сутки будет хотя бы один сбой;

C – за неделю произойдет не менее  $k = 3$  сбоев.

### **Задача 2**

На диспетчерский пульт поступает поток заявок, который является потоком Эрланга второго порядка. Интенсивность потока заявок равна  $\lambda = 4$  заявок в час. Если диспетчер в случайный момент оставляет пульт, то при первой же очередной заявке он обязан вернуться к пульта. Найти плотность распределения времени ожидания очередной заявки и построить график. Вычислить вероятность того, что диспетчер сможет отсутствовать от  $t_1 = 6$  до  $t_2 = 12$  минут.

### **Задача 3**

Задана матрица  $P = \begin{pmatrix} 0,1 & 0,9 \\ 0,2 & 0,8 \end{pmatrix}$  вероятностей перехода дискретной цепи

Маркова из  $i$ -го в  $j$ -ое состояние за один шаг ( $i, j = 1, 2$ ). Распределение вероятностей по состояниям в начальный момент  $t = 0$  определяется вектором  $\bar{q} = (0,4; 0,6)$ .

Найти:

1. Матрицу  $P_2$  перехода цепи из состояния  $i$  в состояние  $j$  за два шага;
2. распределение вероятностей по состояниям в момент  $t = 2$ ;
3. вероятность того, что в момент  $t = 1$  состоянием цепи будет  $i = 2$ ;
4. стационарное распределение.

### **Задача 4**

Задана матрица  $\Lambda = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$  интенсивностей переходов

непрерывной цепи Маркова. Составить размеченный граф состояний, соответствующий матрице  $\Lambda$ ; составить систему дифференциальных уравнений Колмогорова для вероятностей состояний; найти предельное распределение вероятностей.

### **Задача 5**

Вход на станцию метрополитена оборудован системой из  $k = 4$  турникетов. При выходе их строя одного их турникетов остальные продолжают нормально функционировать. Если из строя выйдут все турникеты, то вход на станцию перекрывается. Поток отказов простейший. Среднее время безотказной работы одного турникета составляет  $t = 80$  часов. При выходе из строя каждый турникет начинает сразу ремонтироваться. Время ремонта

распределено по показательному закону и в среднем составляет  $s = 2$  часов. В начальный момент все турникеты исправны. Найти среднюю пропускную способность системы турникетов в процентах от номинальной, если с выходом из строя каждого турникета система теряет  $\left(\frac{100}{k}\right)\%$  своей номинальной пропускной способности. Построить размеченный граф состояний системы.

#### *Задача 6*

Дисплейный зал имеет  $k = 3$  дисплеев. Поток пользователей простейший. Среднее число пользователей, посещающих дисплейный зал за сутки, равно  $n = 55$ . Время обработки информации одним пользователем на одном дисплее распределено по показательному закону и составляет в среднем  $t = 29$  мин. Определить, существует ли стационарный режим работы зала; вероятность того, что пользователей в очереди; среднее число пользователей в зале; среднее время ожидания свободного дисплея; среднее время пребывания пользователя в дисплейном зале.

#### *Задача 7*

На грузовой двор подают вагоны со средним интервалом  $t = 3$  часов. Распределение интервалов между моментами поступления вагонов подчиняется показательному закону. Время погрузки-выгрузки распределено по произвольному закону и в среднем составляет  $\tau = 1,5$  часов при среднем квадратическом отклонении  $\sigma(\tau) = 25$  минут. Пользуясь формулами Полячека-Хинчина, найти:

- а) среднее число вагонов, занимающих грузовой двор;
- б) среднее число вагонов, ожидающих погрузки-выгрузки;
- в) средний простой вагонов в ожидании погрузки-выгрузки;
- г) среднее время пребывания вагона на грузовом дворе.

#### *Задача 8*

В процессе эксплуатации ЭВМ возникают неисправности (сбои). Поток сбоев считаем простейшим. Среднее число сбоев за сутки равно  $m = 2$ . Найти вероятности следующих событий:

- A – за  $n = 3$  суток нет ни одного сбоя;
- B – за одни сутки будет хотя бы один сбой;
- C – за неделю произойдет не менее  $k = 3$  сбоев.

#### *Задача 9*

На диспетчерский пульт поступает поток заявок, который является потоком Эрланга второго порядка. Интенсивность потока заявок равна  $\lambda = 8$  заявок в час. Если диспетчер в случайный момент оставляет пульт, то при первой же очередной заявке он обязан вернуться к пульту. Найти плотность распределения времени ожидания очередной заявки и построить график. Вычислить вероятность того, что диспетчер сможет отсутствовать от  $t_1 = 15$  до  $t_2 = 30$  минут.

#### *Задача 10*

Задана матрица  $P = \begin{pmatrix} 0,6 & 0,4 \\ 0,7 & 0,3 \end{pmatrix}$  вероятностей перехода дискретной цепи

Маркова из  $i$ -го в  $j$ -ое состояние за один шаг ( $i, j = 1, 2$ ). Распределение вероятностей по состояниям в начальный момент  $t = 0$  определяется вектором  $\bar{q} = (0,2; 0,8)$ .

Найти:

1. Матрицу  $P_2$  перехода цепи из состояния  $i$  в состояние  $j$  за два шага;
2. распределение вероятностей по состояниям в момент  $t = 2$ ;
3. вероятность того, что в момент  $t = 1$  состоянием цепи будет  $i = 2$ ;
4. стационарное распределение.

*Задача 11*

Задана матрица  $\Lambda = \begin{pmatrix} -6 & 2 & 4 \\ 1 & -3 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$  интенсивностей переходов

непрерывной цепи Маркова. Составить размеченный граф состояний, соответствующий матрице  $\Lambda$ ; составить систему дифференциальных уравнений Колмогорова для вероятностей состояний; найти предельное распределение вероятностей.

*Задача 12*

Вход на станцию метрополитена оборудован системой из  $k = 3$  турникетов. При выходе их строя одного их турникетов остальные продолжают нормально функционировать. Если из строя выйдут все турникеты, то вход на станцию перекрывается. Поток отказов простейший. Среднее время безотказной работы одного турникета составляет  $t = 65$  часов. При выходе из строя каждый турникет начинает сразу ремонтироваться. Время ремонта распределено по показательному закону и в среднем составляет  $s = 2$  часов. В начальный момент все турникеты исправны. Найти среднюю пропускную способность системы турникетов в процентах от номинальной, если с выходом из строя каждого турникета система теряет  $\left(\frac{100}{k}\right)\%$  своей номинальной пропускной способности. Построить размеченный граф состояний системы.

*Задача 13*

Дисплейный зал имеет  $k = 2$  дисплея. Поток пользователей простейший. Среднее число пользователей, посещающих дисплейный зал за сутки, равно  $n = 32$ . Время обработки информации одним пользователем на одном дисплее распределено по показательному закону и составляет в среднем  $t = 38$  мин. Определить, существует ли стационарный режим работы зала; вероятность того, что пользователей в очереди; среднее число пользователей в зале; среднее время ожидания свободного дисплея; среднее время пребывания пользователя в дисплейном зале.

*Задача 14*



На грузовой двор подают вагоны со средним интервалом  $t = 2,5$  часов. Распределение интервалов между моментами поступления вагонов подчиняется показательному закону. Время погрузки-выгрузки распределено по произвольному закону и в среднем составляет  $\tau = 1$  часов при среднем квадратическом отклонении  $\sigma(\tau) = 15$  минут. Пользуясь формулами Полячека-Хинчина, найти:

- а) среднее число вагонов, занимающих грузовой двор;
- б) среднее число вагонов, ожидающих погрузки-выгрузки;
- в) средний простой вагонов в ожидании погрузки-выгрузки;
- г) среднее время пребывания вагона на грузовом дворе.

*Задача 15*

В процессе эксплуатации ЭВМ возникают неисправности (сбои). Поток сбоев считаем простейшим. Среднее число сбоев за сутки равно  $m = 2,5$ . Найти вероятности следующих событий:

- A – за  $n = 2$  суток нет ни одного сбоя;
- B – за одни сутки будет хотя бы один сбой;
- C – за неделю произойдет не менее  $k = 3$  сбоев.

*Задача 16*

На диспетчерский пульт поступает поток заявок, который является потоком Эрланга второго порядка. Интенсивность потока заявок равна  $\lambda = 5$  заявок в час. Если диспетчер в случайный момент оставляет пульт, то при первой же очередной заявке он обязан вернуться к пульту. Найти плотность распределения времени ожидания очередной заявки и построить график. Вычислить вероятность того, что диспетчер сможет отсутствовать от  $t_1 = 6$  до  $t_2 = 12$  минут.

*Задача 17*

Задана матрица  $P = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,2 \\ 0,2 & 0,8 \end{pmatrix}$  вероятностей перехода дискретной цепи

Маркова из  $i$ -го в  $j$ -ое состояние за один шаг ( $i, j = 1, 2$ ). Распределение вероятностей по состояниям в начальный момент  $t = 0$  определяется вектором  $\bar{q} = (0,1; 0,9)$ .

Найти:

1. Матрицу  $P_2$  перехода цепи из состояния  $i$  в состояние  $j$  за два шага;
2. распределение вероятностей по состояниям в момент  $t = 2$ ;
3. вероятность того, что в момент  $t = 1$  состоянием цепи будет  $i = 2$ ;
4. стационарное распределение.

*Задача 18*

Задана матрица  $\Lambda = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}$  интенсивностей переходов

непрерывной цепи Маркова. Составить размеченный граф состояний, соответствующий матрице  $\Lambda$ ; составить систему дифференциальных

уравнений Колмогорова для вероятностей состояний; найти предельное распределение вероятностей.

#### *Задача 19*

Вход на станцию метрополитена оборудован системой из  $k = 4$  турникетов. При выходе из строя одного из турникетов остальные продолжают нормально функционировать. Если из строя выйдут все турникеты, то вход на станцию перекрывается. Поток отказов простейший. Среднее время безотказной работы одного турникета составляет  $t = 75$  часов. При выходе из строя каждый турникет начинает сразу ремонтироваться. Время ремонта распределено по показательному закону и в среднем составляет  $s = 3$  часов. В начальный момент все турникеты исправны. Найти среднюю пропускную способность системы турникетов в процентах от номинальной, если с выходом из строя каждого турникета система теряет  $\left(\frac{100}{k}\right)\%$  своей номинальной пропускной способности. Построить размеченный граф состояний системы.

#### *Задача 20*

Дисплейный зал имеет  $k = 3$  дисплея. Поток пользователей простейший. Среднее число пользователей, посещающих дисплейный зал за сутки, равно  $n = 70$ . Время обработки информации одним пользователем на одном дисплее распределено по показательному закону и составляет в среднем  $t = 12$  мин. Определить, существует ли стационарный режим работы зала; вероятность того, что пользователей в очереди; среднее число пользователей в зале; среднее время ожидания свободного дисплея; среднее время пребывания пользователя в дисплейном зале.

#### *Задача 21*

На грузовой двор подают вагоны со средним интервалом  $t = 2$  часов. Распределение интервалов между моментами поступления вагонов подчиняется показательному закону. Время погрузки-выгрузки распределено по произвольному закону и в среднем составляет  $\tau = 0,75$  часов при среднем квадратическом отклонении  $\sigma(\tau) = 10$  минут. Пользуясь формулами Полячека-Хинчина, найти:

- а) среднее число вагонов, занимающих грузовой двор;
- б) среднее число вагонов, ожидающих погрузки-выгрузки;
- в) средний простой вагонов в ожидании погрузки-выгрузки;
- г) среднее время пребывания вагона на грузовом дворе.

#### *Задача 22*

В процессе эксплуатации ЭВМ возникают неисправности (сбои). Поток сбоев считаем простейшим. Среднее число сбоев за сутки равно  $m = 1$ . Найти вероятности следующих событий:

- A – за  $n = 3$  суток нет ни одного сбоя;
- B – за одни сутки будет хотя бы один сбой;
- C – за неделю произойдет не менее  $k = 3$  сбоев.

#### *Задача 23*

На диспетчерский пульт поступает поток заявок, который является потоком Эрланга второго порядка. Интенсивность потока заявок равна  $\lambda = 3$  заявок в час. Если диспетчер в случайный момент оставляет пульт, то при первой же очередной заявке он обязан вернуться к пульта. Найти плотность распределения времени ожидания очередной заявки и построить график. Вычислить вероятность того, что диспетчер сможет отсутствовать от  $t_1 = 10$  до  $t_2 = 20$  минут.

*Задача 24*

Задана матрица  $P = \begin{pmatrix} 0,4 & 0,6 \\ 0,5 & 0,5 \end{pmatrix}$  вероятностей перехода дискретной цепи

Маркова из  $i$ -го в  $j$ -ое состояние за один шаг ( $i, j = 1, 2$ ). Распределение вероятностей по состояниям в начальный момент  $t = 0$  определяется вектором  $\bar{q} = (0,9; 0,1)$ .

Найти:

1. Матрицу  $P_2$  перехода цепи из состояния  $i$  в состояние  $j$  за два шага;
2. распределение вероятностей по состояниям в момент  $t = 2$ ;
3. вероятность того, что в момент  $t = 1$  состоянием цепи будет  $i = 2$ ;
4. стационарное распределение.

*Задача 25*

Задана матрица  $\Lambda = \begin{pmatrix} -4 & 4 & 0 \\ 3 & -3 & 0 \\ 7 & 1 & -8 \end{pmatrix}$  интенсивностей переходов

непрерывной цепи Маркова. Составить размеченный граф состояний, соответствующий матрице  $\Lambda$ ; составить систему дифференциальных уравнений Колмогорова для вероятностей состояний; найти предельное распределение вероятностей.

## **10 Методические рекомендации для обучающихся по освоению дисциплины**

Основными видами учебных занятий по дисциплине «Теория случайных процессов и основы теории массового обслуживания» являются лекции, практические занятия. Виды учебных занятий определяются рабочей программой дисциплины.

Лекции являются одним из важнейших видов учебных занятий и составляют основу теоретической подготовки обучающихся по дисциплине «Теория случайных процессов и основы теории массового обслуживания». Они должны давать систематизированные основы научных знаний по дисциплине, концентрировать внимание студентов на наиболее сложных, проблемных вопросах, стимулировать их активную познавательную деятельность и способствовать формированию творческого мышления.

Каждая лекция должна представлять собой устное изложение лектором основных теоретических положений изучаемой дисциплины или отдельной темы как логически законченное целое и иметь конкретную целевую установку. Лекции должны носить, как правило, проблемный характер. Основным методом в лекции выступает устное изложение лектором учебного материала.

Практическим занятиям предшествует лекции и целенаправленная самостоятельная подготовка студентов, поэтому темы практических занятий и практических заданий заранее сообщаются обучающимся для того, чтобы они имели возможность подготовиться и проработать соответствующие теоретические вопросы дисциплины.

В начале каждого практического занятия преподаватель кратко доводит до обучающихся его цель и задачи и обращает внимание обучающихся на наиболее сложные вопросы, относящиеся к изучаемой теме.

Самостоятельная работа студента является составной частью учебной работы. Ее основной целью является формирования навыка самостоятельного приобретения знаний по некоторым не особо сложным вопросам теоретического курса, закрепление и углубление полученных знаний, самостоятельная работа со справочниками, периодическими изданиями и научно-популярной литературой, в том числе находящимися в глобальных компьютерных сетях. Самостоятельная работа подразумевает выполнение учебных заданий, в том числе и индивидуальных получаемых студентом после каждого занятия.

При изучении тем дисциплины «Теория случайных процессов и основы теории массового обслуживания» обучающимся необходимо: ознакомиться с изложенным теоретическим материалом; акцентировать внимание на основных понятиях каждой конкретной темы; пройти тестирование (входной и текущий контроль); выполнить задания на самостоятельную работу; подготовиться к сдаче промежуточной аттестации в виде экзамена с использованием конспекта лекций.

Рабочая программа дисциплины составлена в соответствии с требованиями ФГОС ВО по направлению подготовки 01.03.04 «Прикладная математика».

Программа рассмотрена и утверждена на заседании кафедры №8 «Прикладная математика и информатика»

« 18 » 05 \_\_\_\_\_ 2021 года, протокол № 8.

Разработчики

д. ф.-м. н., профессор

Береславский Э. Н.

*(ученая степень, ученое звание, фамилия и инициалы разработчиков)*

Заведующий кафедрой № 8 Прикладной математики и информатики

к.т.н., доцент

Далингер Я.М.

*(ученая степень, ученое звание, фамилия и инициалы заведующего кафедрой)*

Программа согласована:

Руководитель ОПОП

к.т.н., доцент

Далингер Я.М.

*(ученая степень, ученое звание, фамилия и инициалы руководителя ОПОП)*

Программа рассмотрена и одобрена на заседании Учебно-методического совета Университета « 16 » \_\_\_\_\_ 2021 года, протокол № 7.